Неравенство Мюрхеда и однородные симметрические неравенства

Пусть даны переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Однородным симметрическим многочленом*, порождённым упорядоченным набором целых неотрицательных чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$, называют выражение $T_{a_1,a_2,\ldots,a_n} = \sum\limits_{\sigma\in S_n} x_{\sigma(1)}^{a_1} x_{\sigma(2)}^{a_2} \ldots x_{\sigma(n)}^{a_n}$, где суммирование ведётся по множеству S_n всех перестановок множества $\{1, 2, ..., n\}$.

Пусть даны два упорядоченных набора целых неотрицательных чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Тогда набор a_k *мажорирует* набор b_k, если выполнены следующие условия: $a_1 \geqslant b_1, a_1 + a_2 \geqslant b_1 + b_2, \ldots, a_1 + \ldots + a_{n-1} \geqslant b_1 + \ldots + b_{n-1}, a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n$. Если набор a_k мажорирует набор b_k, то для неотрицательных значений переменных верно *неравенство Мюрхеда*: $T_{a_1,a_2,\ldots,a_n} \geqslant T_{b_1,b_2,\ldots,b_n}$.

В задачах 2,3,4 решения, не использующие неравенство Мюрхеда, не принимаются.

1. **a)** Докажите неравенство Мюрхеда для таких наборов a_k, b_k, что для некоторого индекса i верно, что $a_i = b_i + 1$, для некоторого другого индекса j верно, что $a_j = b_j - 1$, а для всех остальных индексов $a_l = b_l$.

b) Докажите неравенство Мюрхеда в общем случае.

2. Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ верно, что $9(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant (a + b + c)^3$.

3. Докажите неравенство о средних: $\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$.

4. Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ таких, что $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, верно, что $a^2bc + b^2ac + c^2ab \leqslant \dfrac{1}{3}$.

5. Докажите, что для любого натурального n и любых неотрицательных значений переменных верно, что $T_{n+2,0,0} + T_{n,1,1} \geqslant 2T_{n+1,1,0}$. *(Неравенство Шура)*

6. Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ таких, что $abc = 1$, верно, что $\dfrac{1}{a^3(b+c)} + \dfrac{1}{b^3(a+c)} + \dfrac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

7. Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ таких, что $abc = 1$,верно, что $\dfrac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \dfrac{b^3}{(1+a)(1+c)} + \dfrac{c^3}{(1+b)(1+a)} \geqslant \dfrac{3}{4}$.

8. Докажите, что для любых $a, b, c > 0$ таких, что $abc \geqslant 1$, верно, что $\dfrac{a^5 - a^2}{a^5 + b^2 + c^2} + \dfrac{b^5 - b^2}{b^5 + a^2 + c^2} + \dfrac{c^5 - c^2}{c^5 + a^2 + b^2} \geqslant 0$.