Разнобой по тч

Напомним, что *Символом Лежандра* $\left(\dfrac{a}{p}\right)$ называется число, равное 1, если a — квадратичный вычет по модулю p; равное -1, если a — квадратичный невычет по модулю p и 0, если a кратно p.

Первообразным корнем по модулю n называется такой остаток g при делении на n, что его показатель равен $\varphi(n)$.

Напомним некоторые свойства символа Лежандра и первообразных корней:

- $\left(\dfrac{ab}{p}\right) = \left(\dfrac{a}{p}\right)\left(\dfrac{b}{p}\right)$
- $\left(\dfrac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$
- $\left(\dfrac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \pmod p$
- Первообразные корни существуют только по модулям 2, 4, p^a и $2p^a$, $p > 2$

1. Сколько существует первообразных корней по модулю n?

2. Решите сравнение $x^2 + 6x + 7 \equiv 0 \pmod{31}$.

3. Докажите, что многочлен $x^2 + 1$ приводим над полем $\mathbb{Z}_p$, где $p = 4k + 1$.

4. Докажите, что если $x^2 + y^2$ делится на $p = 4k + 3$, то x и y делятся на p. *(Теорема Жирара)*

5. Докажите, что число $\dfrac{x^2+1}{y^2-5}$ никогда не является целым при натуральных x и y, больших 2.

6. Докажите, что у числа $2^n + 1$ не может быть простого делителя вида $8k + 7$.

7. Вычислите $\left(\dfrac{5}{29}\right)$.

8. Для целых a и b выполнено, что $2^a \equiv 2^b \pmod{101}$. Докажите, что $a \equiv b \pmod{100}$.

9. Найдите все двузначные числа $n = 10a+b$ (где a и b — цифры) такие, что для всех натуральных k верно $n \mid (k^a - k^b)$.

10. Пусть $p \geqslant 3$ — простое. Найдите все функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такие, что для $m \equiv n \pmod p$ $f(m) = f(n)$ и для всех m, n $f(mn) = f(m)f(n)$.

11. Вычислите для каждого $p \geqslant 3$ $f(p) = \dfrac{1}{2} - \left\{\dfrac{F(p)}{p}\right\}$, где $F(p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{(p-1)/2} k^{120}$.