Разнобой по тч

Напомним, что *Символом Лежандра* $\left(\frac{a}{p}\right)$ называется число, равное 1, если a — квадратичный вычет по модулю p; равное -1, если a — квадратичный невычет по модулю p и 0, если a кратно p.

Первообразным корнем по модулю n называется такой остаток g при делении на n, что его показатель равен $\varphi(n)$.

Напомним некоторые свойства символа Лежандра и первообразных корней:

- $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$
- $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$
- $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} \pmod p$
- Первообразные корни существуют только по модулям 2, 4, p^a и $2p^a$, $p > 2$

1. Докажите, что многочлен x^2+1 приводим над полем $\mathbb{Z}_p$, где $p = 4k+1$.

2. Докажите, что если x^2+y^2 делится на $p = 4k+3$, то x и y делятся на p. *(Теорема Жирара)*

3. Докажите, что число $\frac{x^2+1}{y^2-5}$ никогда не является целым при натуральных x и y, больших 2.

4. Для целых a и b выполнено, что $2^a \equiv 2^b \pmod{101}$. Докажите, что $a \equiv b \pmod{100}$.

5. Вычислите $\left(\frac{1707}{1777}\right)$.

6. Решите сравнение $x^{12} \equiv 25 \pmod{41}$. *Подсказка: 6 — первообразный корень по модулю 41*

7. Пусть $p \geqslant 3$ — простое. Найдите все функции $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такие, что для $m \equiv n \pmod p$ $f(m) = f(n)$ и для всех m, n $f(mn) = f(m)f(n)$.

8. Докажите, что если p — простое, то $\exists x : p \mid (x^2 - x + 3) \iff \exists y : p \mid (y^2 - y + 25)$.

9. Найдите все двузначные числа $n = 10a + b$ (где a и b — цифры) такие, что для всех натуральных k верно $n \mid (k^a - k^b)$.

10. Вычислите для каждого $p \geqslant 3$ $f(p) = \frac{1}{2} - \left\{\frac{F(p)}{p}\right\}$, где $F(p) = \sum\limits_{k=1}^{(p-1)/2} k^{120}$.

11. Докажите, что если бесконечная арифметическая прогрессия из натуральных чисел содержит точный квадрат и точный куб, то она содержит и шестую степень некоторого натурального числа.