

Функциональные уравнения

1. Найти все $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такие что
 - (a) $f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy$;
 - (b) $f(x + f(y)) = x + y$;
 - (c) $xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$.
2. (a) Найти все $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, такие что $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
(b) Найти все $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, такие что $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
(c) Найти все непрерывные $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такие что $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
(d) Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Доказать, что если f не линейная функция, то её график всюду плотен на плоскости.
(e) Найти все $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие двум условиям:
 $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
 $f(xy) = f(x)f(y)$.
3. (a) Найти все $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такие что $2f(x) + f(1 - x) = x^2$.
(b) Найти все $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, такие что $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$.
4. (a) Найти все $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, такие что $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy$.
(b) Найти все $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, такие что $f(x^2 + y^2) = f(x^2 - y^2) + f(2xy)$.
(Подсказка к обоим пунктам: используйте замену).
5. Найти все $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такие что $|f(x + y) + \sin x + \sin y| < 2$.
6. Найти все $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, такие что $f(x^y) = f(x)^{f(y)}$.
7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. $f(xy) + f(y - x) \geq f(x + y)$. Докажите, что $f(x) \geq 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$.