Арифметические свойства биномиальных коэффициентов

1. **(Теорема Куммера.)** Пусть $k < n$ — натуральные числа. Тогда $\nu_p(C_n^k)$ равняется количеству переносов при сложении k и $n-k$ в p-ичной системе счисления.

2. **(Теорема Люка́.)** Пусть натуральные числа $n \geqslant k$ имеют следующие записи в p-ичной системе счисления: $(\overline{n_m n_{m-1} \ldots n_0})_p$ и $(\overline{k_m k_{m-1} \ldots k_0})_p$. Тогда

$$C_n^k \equiv \prod_{i=0}^{m} C_{n_i}^{k_i} \pmod p.$$

(Подсказка: воспользуйтесь соотношением $(x+1)^{p^i} \equiv (x^{p^i}+1) \pmod p$).

В следующих задачах можно использовать теоремы, даже если вы их пока ещё не сдали.

3. Посчитайте количество нечётных чисел среди $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ в зависимости от n.

4. Пусть $p > 2$. Найдите все натуральные n, для которых:
(a) каждое из чисел $C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}$ делится на p;
(b) каждое из чисел $C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}$ не делится на p.

5. Докажите, что среди чисел $C_{2^n}^k$, при $k = 1, \ldots, 2^n - 1$ ровно одно число делится на 2, но не делится на 4.

6. **(a)** Докажите что для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо $C_{np-1}^{p-1} \equiv 1 \pmod p$;
(b) Докажите $C_{2p-1}^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$;
(c) Докажите $C_{2p-1}^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^3}$.

7. Найдите все натуральные числа $n \geqslant 2$ такие, что C_{n-k}^k чётно для всех $k = 1, 2, \ldots, \left[\dfrac{n}{2}\right]$.

8. Пусть n, k — натуральные числа. Докажите, что

$$\sum_{i \equiv k \pmod{p-1}} C^i_{\frac{p^n-1}{p-1}} \equiv \sum_{i \equiv k \pmod{p-1}} C_n^i \pmod p.$$

9. Блоха прыгает по вещественной прямой начиная в точке 0. Каждую минуту она либо совершает прыжок на 1 влево или вправо, либо остаётся на месте. Через $p-1$ минут блоха должна снова оказаться в 0. Обозначим через $f(p)$ количество различных путей блохи, удовлетворяющих этим условиям. Какой остаток имеет $f(p)$ по модулю p?

10. Пусть j, k — натуральные числа, не превосходящие $p-1$. Докажите, что для любого n такого, что $n \equiv k \pmod{p-1}$, выполнено:

$$\sum_{m \equiv j \pmod{p-1}} C_n^m \equiv C_k^j \pmod p.$$