Постоянно эти таблички...

1. В квадрате $n \times n$ некоторые клетки покрашены в черный, а некоторые — в белый. За один ход можно выбрать прямоугольник со сторонами, параллельными сторонам квадрата, и поменять цвет всех клеток в нем на противоположный. Пусть X — минимальное количество ходов, нужное для того, чтобы все клетки стали белыми, а Y — количество узлов сетки, принадлежащих нечетному количеству черных квадратов. Докажите, что $Y/4 \leqslant X \leqslant Y/2$.

2. Есть набор из nm карточек, каждая из ктороых с одной стороны белая, с другой черная. Они разложены на столе в форме прямоугольника $n \times m$, причем только левая верхняя лежит черной стороной вверх. За ход можно убрать черную карту и перевернуть все карты, соседствующие с ней по стороне. При каких парах (n, m) можно добиться того, чтобы на столе не осталось карт?

3. В каждой клетке таблицы $n \times m$ написано натуральное число. За ход можно добавить одно и то же целое число к числам в двух клетках, имеющих общую сторону, если ни одно из них после этого не станет отрицательным. При каком необходимом и достаточном условии через конечное число операций можно добиться того, чтобы все числа в таблице стали нулями?

4. Через центры некоторых клеток шахматной доски 8×8 проведена замкнутая несамопересекающаяся ломаная. Каждое звено ломаной соединяет центры соседних по горизонтали, вертикали или диагонали клеток. Докажите, что в ограниченном ею многоугольнике общая площадь чёрных частей равна общей площади белых частей.

5. На всех черных клетках шахматной доски, кроме центрального квадрата 4×4, стоит по шашке. За ход шашка может перепрыгнуть через соседнюю (по диагонали), при этом шашка, через которую перепрыгнули, убирается. Можно ли придумать такую последовательность ходов, чтобы на доске осталась одна шашка?

6. Дан квадрат $n \times n$. Изначально его клетки раскрашены в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, причём хотя бы одна из угловых клеток чёрная. За один ход разрешается в некотором квадрате 2×2 одновременно перекрасить входящие в него четыре клетки по следующему правилу: каждую белую перекрасить в чёрный цвет, каждую чёрную — в зелёный, а каждую зелёную — в белый. При каких n за несколько ходов можно получить шахматную раскраску, в которой чёрный и белый цвета поменялись местами?

7. В некоторых целых точках неотрицательной четверти $(\mathbb{Z}_+)^2$ в начальный момент времени живёт инфекция (обозначим это множество M). На каждом такте времени происходит следующее: если точки $(x+1, y)$ и $(x, y+1)$ заражены, то в следующий момент времени будет заражена и точка (x, y) (старые клетки останутся заражёнными). Известно, что ноль оказался заражён по истечении некоторого времени. Докажите, что

$$\sum_{(x,y) \in M} \frac{1}{1+x+y} \geqslant 1.$$