Отбор на июньскую смену в Команду

1. Существуют ли нечетные числа k, l и m, такие что $kl+1$, $lm+1$ и $km+1$ — полные квадраты?

2. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. На окружности ω_1 выбрана точка M. Прямые MA и MB вторично пересекают окружность ω_2 в точках P и Q соответственно. Докажите, что если четырехугольник AO_1BO_2 вписанный, то точка пересечения прямых AQ и BP лежит на ω_1.

3. Петя и Вася играют в игру. Изначально дан пустой граф с n вершинами. За один ход разрешается провести одно ориентированное ребро. Запрещается проводить кратные ребра (в том числе разнонаправленные), и запрещается делать граф сильно связным. Проигрывает тот, кто не может делать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Для $n \in \mathbb{N}$ и положительных $a, b, c \in \mathbb{R}$ докажите неравенство:

$$\frac{a^{n+1}}{a^n + a^{n-1}b + \ldots + b^n} + \frac{b^{n+1}}{b^n + b^{n-1}c + \ldots + c^n} + \frac{c^{n+1}}{c^n + c^{n-1}a + \ldots + a^n} \geqslant \frac{a+b+c}{n+1}.$$

5. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое множество X_n, что $X_n \subset \mathbb{N}$, $|X_n| = n$ и для любого $M \subset X_n$, $M = \{m_1, \ldots, m_k\}$, выполнено

$$\frac{m_1 + \ldots + m_k}{k} = a^b$$

для некоторых $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ и $b > 1$.