Отбор на июньскую смену в Команду. Решения

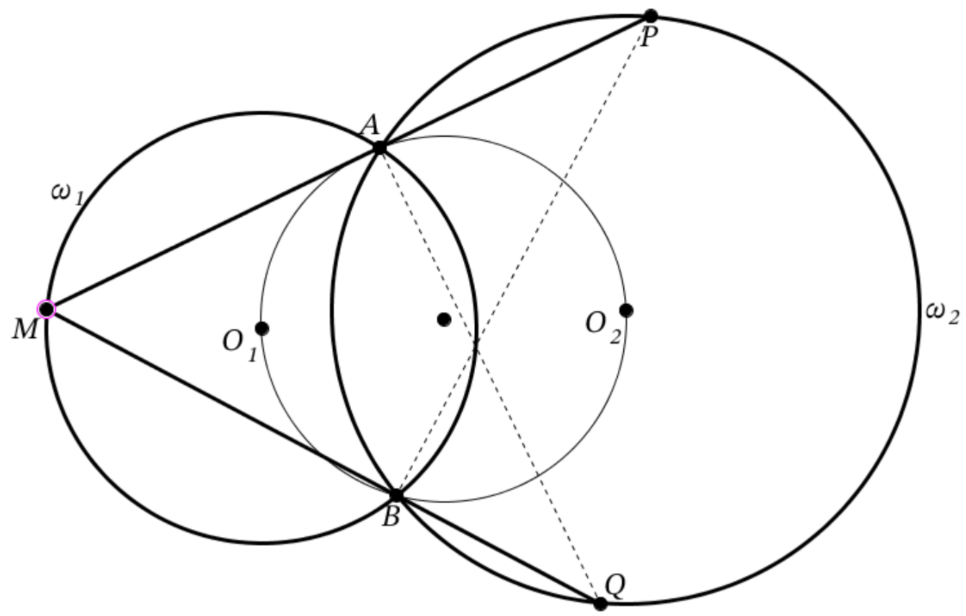
1. Существуют ли нечетные числа k, l и m, такие что $kl+1$, $lm+1$ и $km+1$ — полные квадраты?

Ответ. Нет.

Решение. Докажем, что таких нечетных чисел k, l, m не существует от противного. Предположим что такие числа существуют. Тогда каждое из них сравнимо либо с 1, либо с 3 по модулю 4. Поэтому по принципу Дирихле какие-то два числа дают один и тот же остаток при делении на 4. Пусть $k \equiv l \pmod 4$ (остальные случаи аналогичны). Тогда $kl+1 \equiv k^2+1 \equiv 1+1 \pmod 4$. Но полные квадраты не могут давать остаток 2 по модулю 4. Противоречие.

2. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. На окружности ω_1 выбрана точка M. Прямые MA и MB вторично пересекают окружность ω_2 в точках P и Q соответственно. Докажите, что если четырехугольник AO_1BO_2 вписанный, то точка пересечения прямых AQ и BP лежит на ω_1.

Решение.



$\angle AO_1B + \angle AO_2B = 180°$ из вписанности четырехугольника AO_1BO_2. Так как центральный угол в два раза больше вписанного, опирающегося на ту же дугу, то $\angle AMB + \angle AQB = 90°$. Из суммы углов треугольника MAQ получаем $\angle MAQ = 90°$. Значит, точка пересечения прямой AQ с ω_1 — точка, диаметрально противоположная точке M на окружности ω_1 (вписанный прямой угол опирается на диаметр). Аналогично, точка пересечения прямой BP и ω_1 — точка, диаметрально противоположная точке M на окружности ω_1, что и доказывает утверждение задачи.

Другое решение. Заметим, что четырехугольник AO_1BO_2 симметричен относительно O_1O_2, поэтому $\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2$. Теперь из вписанности AO_1BO_2 получаем $\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2 = 90°$. Из леммы о велосипедистах следует $\angle MAQ = \angle O_1AO_2 = 90°$. Аналогично $\angle MBP = \angle O_1BO_2 = 90°$. Обозначим за H точку пересечения прямых AQ и BP. По доказанному $\angle MAH = \angle MBH = 90°$. Это означает, что точки M, A, H, B лежат на одной окружности (в некотором порядке), то есть точка H лежит на ω_1.

3. Петя и Вася играют в игру. Изначально дан пустой граф с n вершинами. За один ход разрешается провести одно ориентированное ребро. Запрещается проводить кратные ребра (в том числе разнонаправленные), и запрещается делать граф сильно связным. Проигрывает тот, кто не может делать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. При $n \equiv 0 \pmod 4$ и $n \equiv 1 \pmod 4$ выигрывает Вася, иначе Петя.

Решение. Докажем, что любой игрок имеет возможность делать ход до тех пор, пока граф не станет полным (в неориентированном смысле). Пусть в графе есть пара вершин A и B, между которыми нет ребра. Докажем, что игрок, который сейчас должен сделать ход, может провести либо ребро из A в B, либо ребро из B в A (то есть, может сделать ход). Разберем два случая.

- Вершины A и B принадлежат одной компоненте сильной связности. Тогда ребро AB можно направить произвольным образом. При этом распределение вершин по компонентам сильной связности не изменится, и если граф не был сильно связным, то и не станет.

- Вершины A и B принадлежат разным компонентам сильной связности. Тогда в графе отсутствует или путь из A в B, или путь из B в A (или оба пути). Без ограничения общности можно считать, что в графе нет пути из A в B. Тогда если провести ребро из B в A, то пути из A в B по прежнему не будет, а значит граф останется не сильно связным.

Значит, всего ходов будет сделано $\frac{n(n-1)}{2}$, что и дает ответ.

4. Для $n \in \mathbb{N}$ и положительных $a, b, c \in \mathbb{R}$ докажите неравенство:

$$\frac{a^{n+1}}{a^n + a^{n-1}b + \ldots + b^n} + \frac{b^{n+1}}{b^n + b^{n-1}c + \ldots + c^n} + \frac{c^{n+1}}{c^n + c^{n-1}a + \ldots + a^n} \geqslant \frac{a+b+c}{n+1}.$$

Решение. Для начала докажем лемму.

Лемма. Для $n \in \mathbb{N}$ и положительных $a, b \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + a^{n-1}b + \ldots + b^n} \geqslant \frac{a+b}{n+1}.$$

Доказательство леммы. Заметим, что при любом целом m, $1 \leqslant m \leqslant n$, выполнено неравенство

$$(a^m - b^m)(a^{n+1-m} - b^{n+1-m}) \geqslant 0.$$

Раскрыв скобки, получаем

$$a^{n+1} + b^{n+1} \geqslant a^m b^{n+1-m} + b^m a^{n+1-m}. \tag{1}$$

Теперь просуммируем неравенства (1) по всем значениям m от 1 до n. Получаем

$$n(a^{n+1} + b^{n+1}) \geqslant 2a^n b + 2a^{n-1}b^2 + \ldots + 2ab^n.$$

Добавив в левую и правую части выражение $a^{n+1} + b^{n+1}$, получаем:

$$(n+1)(a^{n+1} + b^{n+1}) \geqslant (a+b)(a^n + a^{n-1}b + \ldots + b^n).$$

Это неравенство эквивалентно неравенству из утверждения леммы. Лемма доказана.

Теперь докажем неравенство из условия задачи. Заметим, что
$$\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n+a^{n-1}b+\ldots+b^n}=a-b.$$
Из этого следует, что
$$\frac{a^{n+1}}{a^n+a^{n-1}b+\ldots+b^n}+\frac{b^{n+1}}{b^n+b^{n-1}c+\ldots+c^n}+\frac{c^{n+1}}{c^n+c^{n-1}a+\ldots+a^n}=$$
$$=\frac{b^{n+1}}{a^n+a^{n-1}b+\ldots+b^n}+\frac{c^{n+1}}{b^n+b^{n-1}c+\ldots+c^n}+\frac{a^{n+1}}{c^n+c^{n-1}a+\ldots+a^n}.$$
Поэтому доказываемое неравенство равносильно следующему:
$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+a^{n-1}b+\ldots+b^n}+\frac{b^{n+1}+c^{n+1}}{b^n+b^{n-1}c+\ldots+c^n}+\frac{c^{n+1}+a^{n+1}}{c^n+c^{n-1}a+\ldots+a^n}\geqslant\frac{2a+2b+2c}{n+1}.$$

Но последнее неравенство является суммой трех неравенств, верных по лемме:
$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+a^{n-1}b+\ldots+b^n}\geqslant\frac{a+b}{n+1};$$
$$\frac{b^{n+1}+c^{n+1}}{b^n+b^{n-1}c+\ldots+c^n}\geqslant\frac{b+c}{n+1};$$
$$\frac{c^{n+1}+a^{n+1}}{c^n+c^{n-1}a+\ldots+a^n}\geqslant\frac{c+a}{n+1}.$$
Задача решена.

5. Докажите, что для любого $n\in\mathbb{N}$ существует такое множество X_n, что $X_n\subset\mathbb{N}$, $|X_n|=n$ и для любого $M\subset X_n$, $M=\{m_1,\ldots,m_k\}$, выполнено
$$\frac{m_1+\ldots+m_k}{k}=a^b$$
для некоторых $a\in\mathbb{N}$, $b\in\mathbb{N}$ и $b>1$.
Решение. Для начала докажем лемму.

Лемма. Для любого натурального числа l существует такое натуральное d, что числа d, $2d$, …, ld являются точными степенями.
Доказательство леммы: Выберем простые числа $p_1>p_2>\ldots>p_l$. Выберем натуральные числа $a_2,a_3,\ldots,a_l$ так что $a_j\ \vdots\ p_i$ при $i\neq j$ и $a_j\equiv -1\pmod{p_j}$. (Такие числа $a_2,\ldots,a_l$ существуют по китайской теореме об остатках). Теперь в качестве d подходит число $2^{a_2}3^{a_3}\ldots l^{a_l}$ (легко видеть, что число jd есть точная p_j-ая степень некоторого натурального числа). Лемма доказана.

Вернемся к задаче. Возьмем множество
$$X_n=\{d\cdot n!,2d\cdot n!,\ldots,nd\cdot n!\},$$
где d взято из леммы для числа $l>n!n(n+1)/2$. Осталось проверить, что такое множество подходит. Для произвольного подмножества M множества X_n среднее арифметическое его элементов имеет вид
$$d\cdot\frac{n!}{|M|}\cdot\sum_{k\in M}\frac{k}{n!d}.$$

Легко видеть, что коэффициент перед d не превосходит l и натурален. Из этого факта и леммы следует, что это число есть точная степень.