# Лемма Шпернера

**1.** Отрезок разбит конечным множеством точек на малые отрезки. Левый его конец отмечен числом 0, правый конец — числом 1, и каждая точка деления имеет отметку 0 или 1. Докажите, что существует нечётное число малых отрезков, концы которых отмечены разными числами.

**2.** Имеется дом, в котором несколько комнат и дверей. Известно, что число дверей в каждой комнате равно 0, 1 или 2. Комнату с одной дверью назовём тупиком. Дверь может быть наружной, ведущей из дома на улицу, и внутренней, соединяющей две соседние комнаты. Естественно считать, что комната может иметь только одну наружную дверь, а две соседние комнаты — не более одной общей двери. Докажите, что число тупиков и число наружных дверей имеют одинаковую четность.

**3.** Выведите задачу 1 из задачи 2.

**Определение.** Триангуляцией фигуры $F$ называется её разбиение на треугольники, причём любые два треугольника либо совсем не имеют общих точек, либо имеют только общую вершину или общую сторону.

Треугольники назовём гранями триангуляции, стороны маленьких треугольников — её рёбрами, а их вершины — её вершинами.

**4.** (Лемма Шпернера). Дан треугольник, вершины которого помечены цифрами $1, 2$ и $3$, и его триангуляция. Вершины триангуляции пометили теми же значениями таким образом, чтобы любая вершина на стороне исходного треугольника помечена одной из пометок вершин этой стороны. Докажите, что граней, вершины которых несут три различные отметки, т.е. $1, 2$ и $3$, нечётное число.

**5.** Обобщите лемму Шпернера на трёхмерное пространство.

**6.** Дан центрально симметричный $2n$-угольник, внутри которого отмечено несколько точек. Рассмотрим триангуляцию, вершинами которой будут вершины многоугольника и отмеченные точки. Пусть все вершины триангуляции помечены числами $1, -1, 2, -2$, притом в симметричных вершинах исходного многоугольника стоят противоположные числа. Докажите,что найдётся отрезок, на концах которого стоят противоположные числа.

**7.** Докажите, что грани триангуляции треугольника можно правильно покрасить в два цвета тогда и только тогда, когда её вершины можно пометить числами $1, 2, 3$ таким образом, что для каждой грани её вершины несут отметки $1, 2, 3$.