Неравенство Караматы

Для решения задач полезно вспомнить определения выпуклой (на отрезке) функции и мажорирования одним набором другого.

1. **Неравенство Караматы**.
(a) Пусть $f(x)$ — выпуклая вниз на отрезке $[a, b]$ функция, $x, y, z, t \in [a, b], x > y > z > t, x + t = y + z$. Докажите, что $f(x) + f(t) > f(y) + f(z)$.
(b) Пусть X, Y — два набора вещественных чисел и $X \succ Y$. Докажите, что набор Y может быть получен из набора X с помощью конечного числа операций следующего вида: числа $x_i, x_j (x_j > x_i)$ из текущего набора заменяются числами $x_i + d, x_j - d$ $(d > 0)$, при чем упорядоченность сохраняется (то есть, $x_i + d < x_{i-1}, x_j - d > x_{j+1}$).
(c) Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — выпуклая вниз функция, определённая на отрезке $[a, b]$ числовой прямой, и два невозрастающих набора X и Y по n чисел из этого отрезка таковы, что $X \succ Y$. Тогда верно следующее неравенство (Караматы):
$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) > f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n).$$

2. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите неравенство
$$\sqrt{a + b - c} + \sqrt{b + c - a} + \sqrt{c + a - b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

3. **Неравенство Сегё**. Пусть $f(x)$ — выпуклая вниз функция, $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_{2n-1} \geqslant 0$. Докажите неравенство
$$f(a_1) - f(a_2) + f(a_3) - \ldots + f(a_{2n-1}) \geqslant f(a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + a_{2n-1}).$$

4. **Неравенство Швейцера**. Пусть $m \leqslant a_k \leqslant M$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Докажите неравенство
$$(a_1 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \leqslant \frac{n^2(m + M)^2}{4mM}.$$

5. Пусть $n \geqslant 2$. Определите наименьшую константу C такую, что неравенство
$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant C \left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k\right)^4$$
выполняется для всех наборов неотрицательных чисел.

6. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — положительные числа. Докажите неравенство
$$\left(1 + \frac{a_1^2}{a_2}\right)\left(1 + \frac{a_2^2}{a_3}\right) \ldots \left(1 + \frac{a_n^2}{a_1}\right) \geqslant (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n).$$