Совершенные числа

Число n называется **совершенным**, если оно в два раза меньше суммы своих делителей.

1. Докажите, что следующие числа не совершенны:
 (a) квадрат нечётного числа;
 (b) числа вида p^k, где p простое, $k \in \mathbb{N}$;
 (c) числа вида $p^k\ q^m$, где p, q нечётные простые, $k, m \in \mathbb{N}$.

2. **(a)** Докажите, что число $2^p - 1$ может быть простым только при простом p;
 (b) Докажите, что если $2^p - 1$ простое, то число $2^{p-1}(2^p - 1)$ совершенно.
 (c) Докажите, что других совершенных чётных чисел в природе не бывает.

Замечание. Таким образом, нахождение чётных совершенных чисел сводится к обнаружению простых чисел вида $2^p - 1$, именуемых **числами Мерсена**.

Современная математика не знает ответа на вопрос о существовании **нечётных совершенных чисел**. Также неизвестно конечно ли их количество.

Одно чётное совершенное число выделяется на фоне своих собратьев, будем называть его (?).

3. Пусть $s(n)$ — сумма цифр числа n. Докажите, что для каждого чётного совершенного числа кроме (?) существует натуральное число k такое, что $s^k(n) = 1$.

4. Докажите, что все чётные совершенные числа кроме (?) представляются в виде суммы кубов последовательных нечётных чисел.

5. Докажите, что чётное совершенное число может оканчиваться только на цифры $16, 28, 36, 56, 76$ и 96. За исключением (?).