Комби-разнобой

1. Паша и Гриша играют в игру. Они по очереди красят непокрашенные стороны 2023-угольника таким образом, чтобы никакие две соседние стороны не были покрашены в один цвет. Проигрывает тот, кто последним ввёл в игру новый цвет. Начинает Паша. Кто выиграет при правильной игре?

2. Даны n различных точек на плоскости таких, что ни какие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что количество треугольников с вершинами в этих точках и площади 1, не более $\frac{2}{3}\left(n^2-n\right)$.

3. В параллели учатся 100 школьников. Каждый из них отправил одну открытку кому-то из остальных. Назовём группу из четырёх школьников секретной, если все открытки от них были направлены кому-то из этой же группы. Какое наибольшее количество секретных групп может быть в этой параллели?

4. Пусть $0<\alpha<1$ — иррациональное число, нарисована окружность длины 1. Для любого натурального числа $n \geq 3$ определена последовательность точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$ следующим образом. Сначала выбирается любая точка P_1 на окружности, потом для $2 \leq k \leq n$ точка P_k на окружности такова, что длина дуги $P_{k-1}P_k$ равна α при движении против часовой стрелки по окружности от P_{k-1} до P_k. Предположим, что P_a и P_b — ближайшие соседние точки по обе стороны от P_n. Докажите, что $a+b \leq n$.

5. Марк разрезал квадрат 1542×1542 на доминошки. После чего Гриша расставляет в клетках каждой доминошки числа 1 или -1 (в двух клетках одной доминошки одно и то же число). Гриша стремится, чтобы суммы во всех строчках и столбцах были по модулю не более k. Для какого наименьшего k он может это сделать независимо от разрезания Марка?

6. Охотник и невидимый заяц играют в игру на бесконечном клетчатом поле. Сначала охотник раскрашивает все клетки поля в конечное число цветов. Потом заяц выбирает себе одну из клеток, в которой будет начинать, не сообщая её охотнику. Каждую минуту заяц сообщает охотнику цвет клетки, на которой он находится, а затем перепрыгивает в одну из соседних по стороне клеток. При этом заяц не может прыгать в клетку, в которой уже находился когда-то. Охотник выигрывает, если через конечное время либо заяц не может двигаться, либо охотник может назвать изначальное положение зайца. Докажите, что у охотника существует стратегия для гарантированной победы.