

Финальный разбой

1. Пусть n — натуральное число и X — множество из $n + 2$ целых чисел, каждое из которых по модулю не превосходит n . Докажите, что найдутся такие $a, b, c \in X$, что $a + b = c$.
2. Множество S вершин графа называется доминирующим, если любая вершина графа, не входящая в S , смежна с какой-то вершиной из S . Существует ли граф с четным числом доминирующих множеств?
3. Дана функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что для всех $x, y, z \in \mathbb{R}$ верно, что

$$f(xy) + f(xz) \geq f(x)f(yz) + 1.$$

Найдите все такие функции.

4. Найдите наименьшее действительное r такое, что неравенство

$$\sqrt{1^2 + 1} + \sqrt{2^2 + 1} + \dots + \sqrt{n^2 + 1} \leq \frac{n(n + r)}{2}$$

выполняется для всех натуральных n .

5. На доске написаны n цифр в ряд. Докажите, что к ним можно приписать несколько цифр слева и не более n цифр справа так, чтобы получилась степень двойки..