

Тренировочная олимпиада

1. Пусть f — многочлен с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1. Докажите, что найдется такой многочлен g с целыми коэффициентами, что у произведения fg ровно два нечетных коэффициента.
2. Круглое ожерелье состоит из mn бусинок красного или синего цвета. Оказалось, что независимо от того, как ожерелье было разрезано на m блоков по n последовательных бусинок, в каждом блоке было различное количество красных бусинок. Найдите все пары натуральных чисел m и n , при которых это возможно.
3. На столе лежат n карточек. На каждой карточке записано натуральное число от 1 до n , все числа встречаются по одному разу. Андрей Константинович и Виктор Дмитриевич играют в игру. Игроки ходят по очереди, начинает Андрей Константинович. Перед началом игры Виктор Дмитриевич выбирает число: 1 или 2. Каждый игрок своим ходом забирает себе одну карточку со стола. Через n ходов игра заканчивается. Карточку с числом k будем называть *правильной*, если эту карточку забрали со стола в ход номер k . Виктор Дмитриевич выиграет, если общее количество правильных карточек совпадет по четности с выбранным им перед игрой числом. Найдите все n , при которых у Виктора Дмитриевича есть выигрышная стратегия.
4. Дана трапеция $ABCD$. Точки P и Q на ее боковых сторонах AD и BC таковы, что $\angle APB = \angle CPD$ и $\angle AQB = \angle CQD$. Докажите, что точки P и Q равноудалены от точки пересечения диагоналей трапеции.