Полуфинальный разнобой

1. Простое число $p > 2$ и натуральные числа m и n таковы, что p^2 — среднее арифметическое чисел m^2 и n^2. Докажите, что $2p-m-n$ — либо квадрат, либо удвоенный квадрат.

2. На экваторе растут деревья одинаковой высоты. Если все они упадут на запад, то суммарная длина участков экватора, покрытых не менее чем в пять слоёв, составит ровно 100 км. Докажите, что если все деревья упадут на восток, то суммарная длина участков экватора, покрытых не менее чем в пять слоёв, составит ровно 100 км.

3. Найдите все тройки натуральных чисел (x, y, z), для которых выполяется

$$(x+y+z+2xyz)^2 = (2xy+2yz+2zx+1)^2 + 2023.$$

4. Пусть a, b, c — положтельные числа, для которых выполняется $a+b+c = 4\sqrt[3]{abc}$. Докажите, что

$$2(ab+bc+ac) + 4\min(a^2, b^2, c^2) \geqslant a^2+b^2+c^2.$$

5. Каждая клетка квадрата $(a+b+1)\times(a+b+1)$ покрашена в красный ли синий цвет, прчем красных клеток хотя бы a^2+ab-b, а синих — хотя бы b^2+ab-a. Докажите, что можно выбрать a красных клеток и b синих клеток так, чтобы никаке две из них не лежали в одной строке ил одом столбце.

6. В десятичной записи чисел A и B по 2018 цифр. В числе A ровно 12 цифр отличны от нуля — пять самых левых и семь самых правых. В числе B ровно 14 цифр отличны от нуля — пять самых левых и девять самых правых. Докажите, что в десятичной записи наибольшего общего делителя A и B не более 14 цифр.

7. На острове рыцарей и лжецов есть 1001 поселок, соединенные 1000 дорогами так, что от каждого города можно добраться до каждого. В каждом поселке жители только одного из типов. Жители каждого поселка сделали 2 утверждения:

1. Наш поселок соединен хотя бы с 3 другими поселками.
2. Наш поселок соединен хотя бы с 2 поселками лжецов.

Какое наименьшее количество поселков с лжецами может быть на острове?