Разнобой по неравенствам

Знать неравенства: о средних; Бернулли; КБШ; транснеравенство; метод Штурма.

1. Положительные x, y, z таковы, что $xyz \geqslant xy + yz + zx$. Докажите, что

$$\sqrt{xyz} \geqslant \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

2. При всех натуральных $n \geq 2$ покажите, что

$$\sum_{k=2}^{n} \sqrt[k]{\frac{k}{k-1}} \leqslant n.$$

3. Положительные x, y, z, t в сумме дают 3. Докажите, что

$$x^{-3} + y^{-3} + z^{-3} + t^{-3} \leqslant (xyzt)^{-3}.$$

4. Для положительных a, b, c покажите, что $(a^a b^b c^c)^3 \geqslant (abc)^{a+b+c}$.

5. Пусть $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ — неотрицательные, а $c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n$ — произвольные действительные числа. Докажите, что

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j \min(a_i, a_j) \geqslant 0$;

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j \min(a_i, a_j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_i d_j \min(b_i, b_j) \geqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i d_j \min(a_i, b_j)$.

6. Для неотрицательных x, y, z с суммой 1 какое наименьшее и наибольшее значение может принимать выражение $xy + yz + zx - 2xyz$?

7. Для положительных x, y, a, b с условием, что $a+b=1$ покажите, что $x^a y^b \leqslant ax+by$.

8. Назовём *отношением отрезка к точке* отношение длины отрезка к расстоянию от точки до прямой, содержащей этот отрезок. Где внутри треугольника нужно отметить точку, чтобы сумма отношений сторон треугольника к этой точке было наименьшим?

9. Для пяти действительных чисел $a_1, ..., a_5$ верно, что $a_{k+1} - a_k \geqslant 1$. Оказалось, что $\frac{1}{2}(a_1^2 + ... + a_5^2) = \frac{1}{4}(a_1 + ... + a_5)^2 = A$.

(a) Покажите, что $A \geqslant \frac{25}{3}$.

(b) Покажите, что эта оценка не улучшается.

10. Положительные $x_1, x_2, ..., x_n$ таковы, что $x_1^2 + ... + x_n^2 < \dfrac{x_1 + ... + x_n}{2}$ и $x_1 + ... + x_n < \dfrac{x_1^3 + ... + x_n^3}{2}$. При каком минимальном n это возможно?