Разнобой по теории чисел

1. Дано натуральное число n. Докажите, что среди любых n целых чисел можно выбрать несколько с суммой, делящейся на n.

2. Найдите все такие простые p, что число $3^p + 5^p - 1$ — тоже простое.

3. Пусть S — множество с бесконечным числом элементов, элементы которого — натуральные числа. **(a)** Известно, что при выборе любого конечного подмножества T множества S существует такое натуральное число, не равное 1, что все элементы T делятся на него. Докажите, что существует такое натуральное число, не равное 1, что все элементы S делятся на него. **(b)** Теперь зафиксируем некоторое натуральное число k. Известно, что при выборе любого конечного подмножества T множества S (при чем в T не более k элементов) существует такое натуральное число, не равное 1, что все элементы T делятся на него. Существует ли в этом случае такое натуральное число, не равное 1, что все элементы S делятся на него?

4. В возрастающей бесконечной последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2024-го, является делителем суммы всех предыдущих чисел. Докажите, что в этой последовательности каждое число, начиная с некоторого места, равно сумме всех предыдущих чисел.

5. Существует ли строго возрастающая последовательность натуральных чисел a_k, такая, что для любого целого числа b последовательность $a_k + b$ содержит конечное число простых чисел?

6. Пусть p — нечетное простое число. Пусть a_k — количество таких делителей d числа $kp + 1$, что $k \leqslant d \leqslant p$. Найдите $a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1}$.

7. Докажите, что для любого натурального числа n существует натуральное число K такое, что сумма цифр K равна n и K делится на n.

8. Даны натуральные числа x и y из отрезка $[2, 100]$. Докажите, что при некотором натуральном n число $x^{2^n} + y^{2^n}$ — составное.