Diamond lemma

1. **Diamond lemma (Лемма Ньюмана)**. Дан ориентированный граф, в котором нет бесконечных путей (в частности, нет циклов). Известно, что если из вершины u исходят рёбра в вершины v и w, то найдется вершина t, достижимая из v и из w. Докажите, что из любой вершины достижима ровно одна вершина с нулевой исходящей степенью, если число вершин в графе
(a) конечно; **(b)** бесконечно.

2. Дан ориентированный граф (возможно, с бесконечным числом вершин), в котором нет бесконечных путей (в частности, нет циклов). Известно, что если из вершины u исходят рёбра в вершины v и w, то найдется вершина t, достижимая из v и из w за одинаковое число шагов. Докажите, что для любой вершины все пути из нее в вершины нулевой степени имеют одинаковую длину.

3. На доске выписаны несколько положительных чисел. За один ход Вася на свой выбор стирает два числа a и b и выписывает на доску $\frac{ab}{a+b}$. Докажите, что число, которое будет выписано последним, не зависит от порядка действий.

4. В параллельной вселенной есть n видов частиц, каждая частица может быть заряжена положительно или отрицательно. Изначально ученый выстраивает несколько частиц в ряд, а затем каждую минуту уничтожает пару одинаковых частиц разного заряда, стоящих рядом. Докажите, что последовательность частиц, которая у него останется в конце опыта, не зависит от порядка действий.

5. За ход разрешается вырезать из диаграммы Юнга доминошку любого из двух направлений, если при этом снова получится диаграмма Юнга. Докажите, что вне зависмости от порядка ходов финальная диаграмма (из которой нельзя вырезать доминошку) будет однаковой.

6. В очереди в ларек стоят 2024 щедрых школьника. Первый из них купил миллион конфет. Каждую минуту один из школьнков отдает стоящему за ним человеку несколько своих конфет (хотя бы одну) таким образом, чтобы у него все равно осталось не меньше конфет, чем у того, кому он отдал. Докажите, что процесс не может продолжаться бесконечно и что число конфет, которое останется у каждого школьника в итоге, не зависит от порядка действий.

7. На доске выписаны несколько натуральных чисел. За ход можно взять два числа a и b и заменить их на НОК(a, b) и НОД(a, b). Докажите, что такой процесс обязательно закончтся и что набор чисел, которые будут выписаны в итоге, не зависит от порядка действий.

8. Есть конечный граф, в вершинах которого расставлены числа. За ход можно выбрать вершну v, в которой записано число $r < 0$, заменить его на $-r$ и прибавить r ко всем соседям v. Докажите, что если этот процесс не может продолжаться бесконечно, то он при любом выборе действий заканчивается за одно и то же число ходов и в одной и той же финальной позиции.