

Diamond lemma

- 1. Diamond lemma (Лемма Ньюмана).** Дан ориентированный граф, в котором нет бесконечных путей (в частности, нет циклов). Известно, что если из вершины u исходят рёбра в вершины v и w , то найдется вершина t , достижимая из v и из w . Докажите, что из любой вершины достижима ровно одна вершина с нулевой исходящей степенью, если число вершин в графе
(a) конечно; (b) бесконечно.
- 2.** Дан ориентированный граф (возможно, с бесконечным числом вершин), в котором нет бесконечных путей (в частности, нет циклов). Известно, что если из вершины u исходят рёбра в вершины v и w , то найдется вершина t , достижимая из v и из w за одинаковое число шагов. Докажите, что для любой вершины все пути из нее в вершины нулевой степени имеют одинаковую длину.
- 3.** На доске выписаны несколько положительных чисел. За один ход Вася на свой выбор стирает два числа a и b и выписывает на доску $\frac{ab}{a+b}$. Докажите, что число, которое будет выписано последним, не зависит от порядка действий.
- 4.** За ход разрешается вырезать из диаграммы Юнга доминошку любого из двух направлений, если при этом снова получится диаграмма Юнга. Докажите, что вне зависимости от порядка ходов финальная диаграмма (из которой нельзя вырезать доминошку) будет одинаковой.
- 5.** В очереди в ларек стоят 2024 щедрых школьника. Первый из них купил миллион конфет. Каждую минуту один из школьников отдает стоящему за ним человеку несколько своих конфет (хотя бы одну) таким образом, чтобы у него все равно осталось не меньше конфет, чем у того, кому он отдал. Докажите, что процесс не может продолжаться бесконечно и что число конфет, которое останется у каждого школьника в итоге, не зависит от порядка действий.
- 6.** В параллельной вселенной есть n видов частиц, каждая частица может быть заряжена положительно или отрицательно. Изначально ученый выстраивает несколько частиц в ряд, а затем каждую минуту уничтожает пару одинаковых частиц разного заряда, стоящих рядом.
(a) Докажите, что последовательность частиц, которая у него останется в конце опыта, не зависит от порядка действий.
(b) Пусть S и T — ряды из частиц частиц. Оказалось, что если ученый соединит эти два ряда в порядке ST , то у него получится уничтожить все частицы. Докажите, что это получится и если он соединит их в порядке TS .
- 7. Chip firing game.** У Пети и Васи есть два одинаковых конечных ориентированных графа (без петель, но с кратными ребрами), в вершинах которых одинаковым образом разложены фишки. Каждый может играть со своим графом следующим образом: если число фишек в вершине v не меньше числа исходящих ребер, можно передвинуть из v по одной фишке в каждую вершину, в которую входит исходящее из v ребро. За n ходов Петя получил в своем графе такую расстановку фишек, что для каждой вершины число фишек в ней меньше числа исходящих из нее рёбер.

Докажите, что как бы ни играл Вася, он сможет сделать n ходов и в итоге получит ту же расстановку, что и Петя. Более того, из одинаковых вершин мальчики передвигали фишки одинаковое число раз.