

Листочек с задачками

1. Раскраска связного графа такова, что для любой вершины все вершины, соединенные с ней, одного цвета. Докажите, что цветов использовано не больше двух.
2. Даны непересекающиеся конечные множества натуральных чисел A и B , состоящие из n и m элементов соответственно. Известно, что каждое натуральное число, принадлежащее A или B , удовлетворяет хотя бы одному из условий $k + 17 \in A$, $k - 31 \in B$. Докажите, что $17n = 31m$.
3. На плоскости расположено несколько прямых и точек. Докажите, что на плоскости найдётся точка A , не совпадающая ни с одной из данных точек, расстояние от которой до любой из данных точек больше расстояния от неё до любой из данных прямых.
4. На доске написаны числа $1, 2, \dots, 1000$. Двое играют в следующую игру. Каждый своим ходом стирает одно из оставшихся на доске чисел. Первым ходом первый игрок стирает любое число. Если предыдущим ходом стёрто число n , то можно стереть одно из чисел $n - 1, n + 1, n/2$ или $2n$, если, конечно, такое число есть на доске. Не имеющий хода проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?
5. На прямоугольном столе лежат равные картонные квадраты n различных цветов со сторонами, параллельными сторонам стола. Если рассмотреть любые n квадратов различных цветов, то какие-нибудь два из них можно прибить к столу одним гвоздем. Докажите, что все квадраты некоторого цвета можно прибить к столу $2n - 2$ гвоздями.
6. Каждые два из 21 города соединены прямым рейсом одной из четырёх авиакомпаний. Докажите, что существует замкнутый маршрут из четырёх рейсов одной авиакомпании.
7. Выпуклый многоугольник на плоскости таков, что его образ при любом параллельном переносе содержит целую точку. Докажите, что расстояние между какими-то двумя вершинами многоугольника не меньше $\sqrt{2}$.