Листочек с задачками

1. На доске написаны числа $1, 2, \ldots, 1000$. Двое играют в следующую игру. Каждый своим ходом стирает одно из оставшихся на доске чисел. Первым ходом первый игрок стирает любое число. Если предыдущим ходом стёрто число n, то можно стереть одно из чисел $n-1, n+1, n/2$ или $2n$, если, конечно, такое число есть на доске. Не имеющий хода проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре?

2. Даны непересекающиеся конечные множества натуральных чисел A и B, состоящие из n и m элементов соответственно. Известно, что каждое натуральное число, принадлежащее A или B, удовлетворяет хотя бы одному из условий $k + 17 \in A$, $k - 31 \in B$. Докажите, что $17n = 31m$.

3. На прямоугольном столе лежат равные картонные квадраты n различных цветов со сторонами, параллельными сторонам стола. Если рассмотреть любые n квадратов различных цветов, то какие-нибудь два из них можно прибить к столу одним гвоздем. Докажите, что все квадраты некоторого цвета можно прибить к столу $2n - 2$ гвоздями.

4. Каждые два из 21 города соединены прямым рейсом одной из четырёх авиакомпаний. Докажите, что существует замкнутый маршрут из четырёх рейсов одной авиакомпании.

5. Выпуклый многоугольник на плоскости таков, что его образ при любом параллельном переносе содержит целую точку. Докажите, что расстояние между какими-то двумя вершинами многоугольника не меньше $\sqrt{2}$.

6. В ряд выписано 26 ненулевых цифр. Докажите, что этот ряд можно разбить на несколько частей так, чтобы сумма чисел, образованных цифрами каждой из частей, делилась на 13.

7. Для каких натуральных $N > 50$ можно так познакомить между собой N человек, чтобы у каждых 50 из них был ровно один общий знакомый?