Многочлены Чебышёва

Определение.
Многочлены Чебышёва первого рода определяются по рекуррентным формулам:

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Многочлены Чебышёва второго рода определяются по рекуррентным формулам:

$$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x, U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x).$$

1. Докажите, что $T_n(\cos(a)) = \cos(na)$ и $U_{n-1}(\cos a) = \dfrac{\sin(na)}{\sin(a)}$.

2. Найдите значения $T_n(x), U_n(x)$ в точках $1, -1, 0$. Найдите корни этих многочленов. Нарисуйте схематичный график многочлена $T_n(x)$.

3. Докажите тождества:
(a) $T_n(T_m(x)) = T_m(T_n(x))$.
(b) $T_{n+1}(x) = xU_n(x) - U_{n-1}(x)$.
(c) $T_n(x)^2 - (x^2-1)U_{n-1}(x)^2 = 1$.

4. Докажите, что если число m рационально и $\cos(m^\circ)$ не равен $0, \pm 1/2, \pm 1$, то $\cos(m^\circ)$ – число иррациональное.

5. Приведенный многочлен $S(x)$ степени n удовлетворяет следующему равенству для всех ненулевых t: $S(t + 1/t) = t^n + 1/t^n$. Выразите $S(t)$ через многочлены Чебышёва.

6. Рассмотрим приведенный многочлен $P_n(x) = \dfrac{T_n(x)}{2^{n-1}}$.

(a) Докажите, что для $-1 \leqslant x \leqslant 1$ выполнено $\max|P_n(x)| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

(b) Рассмотрим приведенный многочлен $Q(x)$ степени n. Докажите, что если для $-1 \leqslant x \leqslant 1$ выполнено $\max|Q(x)| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$, то $Q = P_n$.

Полученный результат показывает, что $P_n(x)$ — приведенный многочлен степени n, который меньше всего отклоняется от нуля на отрезке $[-1, 1]$

7. Пусть $H(x)$ — многочлен степени не выше n, причем для $-1 \leqslant x \leqslant 1$ выполнено $|H(x)| \leqslant 1$. Докажите, что тогда $|H^{(k)}(x)| \leqslant |T_n^{(k)}(x)|$ для всех x таких что $|x| \geqslant 1$ и всех целых $k \geqslant 0$.

(Здесь $f^{(k)}(x)$ обозначает k-ю производную функции $f(x)$).