Многочлены Чебышёва

Определение.
Многочлены Чебышёва первого рода определяются по рекуррентным формулам:

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Многочлены Чебышёва второго рода определяются по рекуррентным формулам:

$$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x, U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x).$$

1. Докажите, что $T_n(\cos(a)) = \cos(na)$ и $U_{n-1}(\cos a) = \dfrac{\sin(na)}{\sin(a)}$.

2. Докажите, что если m рационально и $\cos(m^\circ)$ не равен $0, \pm 1/2, \pm 1$, то $\cos(m^\circ)$ – число иррациональное.

3. Рассмотрим приведенный многочлен $S(x)$ степени n, удовлетворяющий следующему равенству для всех ненулевых t: $S(t + 1/t) = t^n + 1/t^n$. Выразите его через многочлены Чебышёва.

4. Рассмотрим приведенный многочлен $P_n(x) = \dfrac{T_n(x)}{2^{n-1}}$.

(a) Докажите, что $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P_n(x)| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

(b) Рассмотрим приведенный многочлен $Q(x)$ степени n. Докажите, что если $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |Q(x)| \leqslant$ $\leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$, то $Q = P_n$.

Полученный результат показывает, что $P_n(x)$ — приведенный многочлен степени n, который меньше всего отклоняется от нуля на отрезке $[-1, 1]$.

5. Пусть $H(x)$ — многочлен степени не выше n, причем для $-1 \leqslant x \leqslant 1$ выполнено $|H(x)| \leqslant 1$. Докажите, что тогда $|H^{(k)}(x)| \leqslant |T_n^{(k)}(x)|$ для всех x таких что $|x| \geqslant 1$ и всех целых $k \geqslant 0$.

(Здесь $f^{(k)}(x)$ обозначает k-ю производную функции $f(x)$).

6. Докажите, что $T_n(xy) > T_n(x)T_n(y)$ для всех $x > 1, y > 1$.

7. **(a)** Рассмотрим выражение $R_n(x) = x - \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{x - \cfrac{1}{\dots - \cfrac{1}{x - \cfrac{2}{x}}}}}$.

Докажите, что $R_n(x) = \dfrac{T_n(x)}{2T_{n-1}(x)}$.

(b) Пусть c_i — i-е число Каталана. Тогда для $n > 1$ в степенных рядах

$$\frac{y \cdot T_n\left(\frac{1}{2y}\right)}{T_{n-1}\left(\frac{1}{2y}\right)} \quad \text{и} \quad 1 - c_0y^2 - c_1y^4 - c_2y^6 - \dots$$

совпадают коэффициенты при мономах $y^0, y^1, \dots, y^{2n-4}$ включительно.