Оценки в тч

1. **Лемма Зигеля.** Пусть есть ОСЛУ с целыми коэффициентами $a_{ij}(i = 1, \ldots, p,\ j = 1, \ldots, q)$. Пусть также $p < q$ и $|a_{ij}| < A$ для всех i и j. Тогда существует ненулевое целочисленное решение системы $(x_1, \ldots, x_q)$ такое, что $|x_j| < 1 + (qA)^{\frac{p}{q-p}}$ для всех j.

   Чтобы найти искомое решение мы будем подставлять в систему разные наборы целых чисел и смотреть на полученную правую часть.

   (a) Пусть каждое число набора, которые мы подставляем в систему ограничено по модулю натуральным числом T. Среди какого количества наборов стоит искать решение системы?
   (b) Сколько наборов значений правой части после подстановки мы сможем получить?
   (c) Постройте нетривиальный набор, на котором система дает нулевую правую часть.
   (d) Докажите лемму Зигеля.

2. **Теорема Дирихле (1842).** Пусть α и $C > 1$ — действительные числа. Тогда существуют такие целые числа p, q, что $1 \leqslant q < C$ и $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| \leqslant \dfrac{1}{Cq}$.

3. **(a)** Пусть α – иррациональное число. Тогда существует бесконечно много таких взаимно простых целых чисел p, q, что $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^2}$.
   (b) Для рациональных чисел аналогичное утверждение неверно: существует такое $C > 0$, что при любых $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, p \neq q\alpha$ выполняется $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| > \dfrac{1}{Cq}$.

4. **Теорема Лиувилля (1844).** Пусть α — алгебраическое число степени $n > 1$ (т.е. корень многочлена степени n с целыми коэффициентами). Тогда существует такая константа $C(\alpha) > 0$, что для любых $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ выполняется $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| > \dfrac{1}{C(\alpha)q^n}$.

5. Дано действительное число $r > 1$. Известно, что при любых натуральных m и n выполнено $m \,\vdots\, n \Rightarrow [mr] \,\vdots\, [nr]$. Докажите, что r — целое.