Галопом по перестановкам!

Определение. Пусть дано конечное множество M. *Перестановка* — это биективное отображение $\sigma : M \to M$. Часто считают, что $M = \{1, 2, \dots, n\}$.

Пример.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Здесь $\sigma(1) = 2, \sigma(3) = 4, \sigma(6) = 6$.

Определение. *Инверсией* перестановки σ называется такая пара чисел $i < j$, для которой выполняется $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Определение *Четностью* перестановки называется четность числа ее инверсий.

Определение. *Циклом* $(i_1, \dots, i_k)$ длины k называется перестановка, в которой $\sigma(i_j) = i_{j+1}$ для $j = 1, \dots, k-1$, $\sigma(i_k) = i_1$, а также $\sigma(l) = l$ для $l \notin \{i_1, \dots, i_k\}$. Цикл длины 2 называется *транспозицией.*

Любую перестановку можно представить в виде композиции циклов (в таком разложение принято считать неподвижные элементы циклами длины 1). Перестановка σ из примера представима в виде $(1, 2) \circ (3, 4, 5) \circ (6) \circ (7)$.

Определение *Типом* перестановки называется набор длин циклов из описанного выше разложения.

Например, тип перестановки σ — это $(3, 2, 1, 1)$.

Определение. Порядком перестановки σ называется такое наименьшее натрулальное m, что σ^m (перестановка σ, примененная m раз) является тождественой.

Напоминание.

- При $n \geqslant 2$ четных и нечетных перестановок чисел от 1 до n поровну.
- Любую перестановку можно представить в виде композиции транспозиций. Четную — в виде композиции четного числа транспозиций, нечетную — в виде композиции нечетного числа.
- Комопзиция двух перестановок одинаковой четности четна, разной — нечетна.

1. Пусть σ — перестановка типа $(d_1, \dots, d_k)$. Чему равны **(a)** четность σ, **(b)** порядок σ?

2. Каких перестановок чисел от 1 до n больше, четного или нечетного порядка?

3. Даны два многочлена с целыми коэффицентами $P(x)$ и $Q(x)$. Оказалось, что при всех целых x значение $P(Q(x)) - x$ делится на 2024. Докажите, что при всех целых x значение $Q(P(x)) - x$ тоже делится на 2024.

4. К колоде из 36 карт можно применить следующую операцию: сначала разделить на две стопки, положив в одну 18 верхних карт, а в другую — 18 нижних, а затем «слить» эти стопки, то есть, на самый верх положить верхнюю карту из первой стопки, под нее — верхнюю карту из второй, затем вторую из первой, затем вторую из второй и так далее. Докажите, что, повторив несколько раз такую операцию, можно прийти к начальному расположению карт в колоде. Сколько раз нужно повторить для этого данную операцию?

5. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок. Известно, что можно выбрать по бусинке из каждой коробки так, что все цвета будут представлены. Докажите, что число способов такого выбора есть ненулевая степень двойки.

6. Юрий Алексеевич придумал комбинацию поворотов кубика Рубика, изменяющую его, а потом взял собранный кубик и повторил эту комбинацию поворотов 101 раз. Докажите, что он не мог получить собранный кубик.

7. По кругу записаны в порядке возрастания по часовой стрелке числа от 1 до 31. Разрешается взять любые три числа a, b, c (не обязательно соседние и стоящие в любом порядке) и заменить их числами $c, a - 1/10$, и $b + 1/10$ соответственно. Докажите, что, применяя такие операции, можно добиться, чтобы числа стояли в порядке возрастания против часовой стрелки.

8. **[Сложная задача на шоколадку!]** Обозначим S_{10} множество перестановок из 10 элементов. Давид дал задание придумать две перестановки из $a, b \in S_{10}$ и под каждым словом из букв a и b длины не более 10^{200} написать какая перестановка получается, если сделать композицию букв этого слова справа налево, а ещё количество неподвижных элементов этой перестановки. Оказалось, что у Вити и Лизы тождественные перестановки получилось под одними и теми же словами. Кроме того, оказалось, что у Лизы всякая перестановка под каким-нибудь словом встречается. Верно ли, что у Вити и Лизы получились одни и те же числа под всеми словами?