Векторные пространства в комбинаторике

1. Есть n не горящих лампочек и k выключателей. Каждый выключатель соединён с некоторыми лампочками. При нажатии выключателя, все соединённые с ним лампочки меняют своё состояние (если горели, то гаснут, если не горели, то загораются).
(a) Докажите, что если $k < n$, то при любом соединении между лампочками и выключателями найдётся комбинация горящих лампочек, которую нельзя получить.
(b) Докажите, что если $k > n$, то при любом соединении можно переключить ненулевое количество выключателей по одному разу так, чтобы ни одна лампочка в итоге не загорелась.
(c) Сколькими способами можно соединить n лампочек и k выключателей, чтобы любая комбинация лампочек была достижима?

2. Виктор Дмитриевич вписал действительные числа в клетки квадрата 3×3 так, что получился магический квадрат, а затем все запомнил и стер. Юрий Алексеевич может указать на клетку и спросить, какое число было в ней. Какое наименьшее количество вопросов потребуется Юрию Алексеевичу, чтобы восстановить весь квадрат?
(Магический квадрат — такая квадратная таблица с числами, что сумма чисел в каждой строке, каждом столбце и на обеих диагоналях одинакова.)

3. В таблице размером $m \times n$ записаны числа так, что для каждых двух строк и каждых двух столбцов сумма чисел в двух противоположных вершинах образуемого ими прямоугольника равна сумме чисел в двух других его вершинах. Часть чисел стёрли, но по оставшимся можно восстановить стёртые. Докажите, что осталось не меньше чем $n + m - 1$ чисел.

4. Пусть A — множество векторов длины n с координатами, являющимися остатками по модулю 3, обладающее следующим свойством: для каждой пары различных векторов $a, b \in A$ есть такой номер координаты i, что $b_i \equiv a_i + 1 \pmod 3$. Докажите, что $|A| \leqslant 2^n$.

5. В социальной сети с фиксированным конечным числом пользователей каждый пользователь имеет фиксированный набор подписчиков среди остальных пользователей. Кроме того, каждый пользователь имеет некоторый начальный рейтинг — целое положительное число (не обязательно одинаковое для всех пользователей). Каждую полночь рейтинг каждого пользователя увеличивается на сумму рейтингов, которые имели его подписчики непосредственно перед полуночью.

Пусть m — некоторое целое положительное число. Хакер, не являющийся пользователем сети, хочет, чтобы рейтинги всех пользователей делились на m. Раз в день он может либо выбрать некоторого пользователя и увеличить его рейтинг на 1, либо ничего не делать. Докажите, что через несколько дней хакер сможет достичь своей цели.