Теория вероятностей

Определение. Пусть Ω — не более чем счётное множество, называемое *множеством элементарных исходов*. Зададим такую функцию $P; \Omega \to \mathbb{R}_+$ (называемую вероятностью элементарного исхода), что $\sum\limits_{\omega \in \Omega} P(x) = 1$. Такая пара $(\Omega; P)$ называется *дискретным вероятностным пространством.*

Событием называется произвольное подмножество множества Ω. Вероятность события — это сумма вероятностей элементарных исходов, входящих в это событие.

Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной*. Для каждой случайной величины ξ определено её *математическое ожидание*: $E\xi = \sum\limits_{\omega \in \Omega} P(\omega)\xi(\omega)$. Легко проверить, что математическое ожидание обладает свойством линейности: для любых случайных величин ξ и ν и для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $E(\xi + \nu) = E\xi + E\nu, E(\lambda\xi) = \lambda E(\xi)$.

1. У Андрея есть колода из 36 карт, в которой по 9 карт каждой масти. Андрей достал из колоды случайные 6 карт. С какой вероятностью среди этих карт есть карты всех мастей?

2. В страшную грозу по верёвочной лестнице цепочкой поднимаются n гномиков. Когда происходит удар грома, то от испуга каждый гномик, независимо от других, может упасть с вероятностью p $(0 < p < 1)$. Если гномик падает, то он сшибает и всех гномиков, которые находятся ниже. Найдите
(a) вероятность того, что после первого удара грома упадёт ровно k гномиков;
(b) математическое ожидание числа упавших после первого удара грома гномиков.

3. При двух бросаниях игрального кубика вероятность того, что выпадет одинаковое число очков, равна 1/6. Докажите, что кубик правильный (т.е. все числа от 1 до 6 выпадают равновероятно).

4. Стандартная рулетка имеет 38 секторов. Можно поставить один доллар на какой-то сектор. Если выпадет этот сектор, то ставка возвращается игроку, а также выплачивается выигрыш 35 долларов. Если сектор не выпадает, то ставка переходит к казино.
(a) Найдите матожидание выигрыша в одном раунде этой игры (если ставка сгорает, то выигрыш игрока составляет минус один доллар).
(b) Билл решил отучить Джека от рулетки. Он предлагает ему пари на 20 долларов. Условия пари следующие: Джек 35 раз играет в рулетку. Билл утверждает, что при этом Джек ни разу не выиграет. Выгодно ли Джеку такое пари?

5. Сколько в среднем раз нужно бросить кубик, чтобы выпали все значения от 1 до 6?

6. В графе с n вершинами случайным образом проводят рёбра (каждое ребро проведено с вероятностью 1/2, рёбра проводят независимо). Сколько в среднем треугольников получится в этом графе?

7. **(a)** Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{C^n_{2^{n/2}}}{2^{n^2/2}} = 0$.
(b) Полный граф на $2^{n/2}$ вершинах случайным образом красят в два цвета (т.е. рёбра красят независимо, каждое ребро — с равной вероятностью в первый и во второй цвет). Случайная величина ξ — количество одноцветных полных подграфов на n вершинах. Докажите, что $M\xi < 1$.
(c) **(Теорема Эрдёша, 1947)** Рёбра полного графа на $2^{n/2}$ вершинах можно покрасить в два цвета так, чтобы в нём не было одноцветных полных n-вершинных подграфов. Иными словами, число Рамсея $R(n; n) > 2^{n/2}$.