Теория вероятностей

Определение. Пусть Ω — не более чем счётное множество, называемое *множеством элементарных исходов*. Зададим такую функцию $P; \Omega \to \mathbb{R}_+$ (называемую вероятностью элементарного исхода), что $\sum\limits_{\omega\in\Omega} P(x) = 1$. Такая пара $(\Omega; P)$ называется *дискретным вероятностным пространством.*

Событием называется произвольное подмножество множества Ω. Вероятность события — это сумма вероятностей элементарных исходов, входящих в это событие.

Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *случайной величиной.* Для каждой случайной величины ξ определено её *математическое ожидание*: $E\xi = \sum\limits_{\omega\in\Omega} P(\omega)\xi(\omega)$. Легко проверить, что математическое ожидание обладает свойством линейности: для любых случайных величин ξ и ν и для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено $E(\xi + \nu) = E\xi + E\nu, E(\lambda\xi) = \lambda E(\xi)$.

1. В страшную грозу по верёвочной лестнице цепочкой поднимаются n гномиков. Когда происходит удар грома, то от испуга каждый гномик, независимо от других, может упасть с вероятностью p $(0 < p < 1)$. Если гномик падает, то он сшибает и всех гномиков, которые находятся ниже. Найдите
   (a) вероятность того, что после первого удара грома упадёт ровно k гномиков;
   (b) математическое ожидание числа упавших после первого удара грома гномиков.

2. Докажите, что существует полный ориентированный граф с n вершинами, в котором не менее $\dfrac{n!}{2^{n-1}}$ гамильтоновых путей.

3. Даны натуральные числа n и k, а также целое неотрицательное число a. Выберем случайное k-элементное подмножество X множества $\{1, 2, \dots, k + a\}$ (равновероятно), и независимо от него выбирается случайное n элементное подмножество множества $\{1, 2, \dots, k + n + a\}$ (равновероятно). Докажите, что вероятность события $\min(Y) > \max(X)$ не зависит от a.

4. В графе с n вершинами случайным образом проводят рёбра (каждое ребро проведено с вероятностью $1/2$, рёбра проводят независимо). Сколько в среднем треугольников получится в этом графе?

5. В мешке лежит 100 шаров, на каждом из которых записаны числа $1, 2, \dots, 100$. Заплатив 90 рублей, игрок может случайным образом вытащить n шаров, после чего он получит в качестве премии столько рублей, каково максимальное число на выбранных им шарах. Найти наименьшее n, при котором математическое ожидание размера премии превысит 90 рублей.

6. **(a)** Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{C^n_{2^{n/2}}}{2^{n^2/2}} = 0$.
   (b) Полный граф на $2^{n/2}$ вершинах случайным образом красят в два цвета (т.е. рёбра красят независимо, каждое ребро — с равной вероятностью в первый и во второй цвет). Случайная величина ξ — количество одноцветных полных подграфов на n вершинах. Докажите, что $M\xi < 1$.
   (c) **(Теорема Эрдёша, 1947)** Рёбра полного графа на $2^{n/2}$ вершинах можно покрасить в два цвета так, чтобы в нём не было одноцветных полных n-вершинных подграфов. Иными словами, число Рамсея $R(n; n) > 2^{n/2}$.

7. Несамопересекающаяся кривая длины 22 находится внутри круга радиуса 1. Докажите, что найдется прямая, имеющая с этой кривой по крайней мере 8 общих точек.