# ТЧ с подсказками

**1.** Пусть $n$ — натуральное число. Существуют ли такие натуральные числа $a_1, \ldots, a_n$ (не все равные друг другу), что среднее арифметическое любых двух из них равно среднему геометрическому двух или более чисел $a_i$?
*(подсказка: принцип крайнего)*

**2.** Пусть $p > 5$ — простое число, а $S = \{p - n^2 | n^2 < p\}$. Докажите, что $S$ содержит такие $1 < a < b$, что $b$ делится на $a$.
*(подсказка: рассмотрите маленькие $p$)*

**3.** Найдите все натуральные $n$, такие, что $n!$ является делителем числа $\prod\limits_{p<q\leqslant n}(p+q)$, произведение ведется по простым $p, q$. *(подсказка: принцип крайнего)*

**4.** Найдите все такие натуральные $a, b$, что число $\dfrac{b\sqrt{2a-b}}{4\sqrt{2a+b}}$ — простое.
*(подсказка: выразите $a$)*

**5.** Пусть $a, b, n$ — натуральные числа, $b$ — нечетное, $1 < b < a, b^n | a^n - 1$. Докажите, что $a^b > \dfrac{3^n}{n}$.
*(подсказка: LTE)*

**6.** Найдите все натуральные $n$, такие, что число $\dfrac{4^n - 1}{3}$ — делитель $4m^2 + 1$ для некоторого $m$. *(подсказка: ответ — $n = 2^k$ для всех натуральных $k$)*

**7.** Для каждого простого $p$ построили граф $G_p : |G_p| = p$, вершинам даны все возможные номера от 1 до $p$. Между вершинами с номерами $n$ и $m$ проведено ребро в том и только в том случае, если $p$ делит $(m^2 - n + 1)(n^2 - m + 1)$. Докажите, что есть бесконечно много $p$, для которых $G_p$ — не связный.
*(подсказка: $x^2 - x + 1 = 0$)*