

## ТЧ с подсказками

1. Пусть  $n$  — натуральное число. Существуют ли такие натуральные числа  $a_1, \dots, a_n$  (не все равные друг другу), что среднее арифметическое любых двух из них равно среднему геометрическому двух или более чисел  $a_i$ ?  
(с первыми двумя задачами вы же справитесь без подсказок?)
2. Пусть  $p > 5$  — простое число,  $S = \{p - n^2 | n^2 < p\}$ . Докажите, что  $S$  содержит такие  $1 < a < b$ , что  $b$  делится на  $a$ .
3. Найдите все такие натуральные  $a, b$ , что число  $\frac{b\sqrt{2a-b}}{4\sqrt{2a+b}}$  — простое.  
(подсказка: выразите  $a$ )
4. Пусть  $a, b, n$  — натуральные числа,  $b$  — нечетное,  $1 < b < a$ ,  $b^n | a^n - 1$ . Докажите, что  $a^b > \frac{3^n}{n}$ .  
(подсказка: LTE)
5. Найдите все натуральные  $n$ , такие, что число  $\frac{4^n - 1}{3}$  — делитель  $4m^2 + 1$  для некоторого  $m$ .  
(подсказка: ответ —  $n = 2^k$  для всех натуральных  $k$ )
6. Для каждого простого  $p$  построили граф  $G_p : |G_p| = p$ , вершинам даны все возможные номера от 1 до  $p$ . Между вершинами с номерами  $n$  и  $m$  проведено ребро в том и только в том случае, если  $p$  делит  $(m^2 - n + 1)(n^2 - m + 1)$ . Докажите, что есть бесконечно много  $p$ , для которых  $G_p$  — не связный.  
(подсказка:  $x^2 - x + 1 = 0$ )
7. Найдите все функции  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ , удовлетворяющие следующим условиям:  
1)  $f(xy) = f(x) + f(y)$ .  
2) Есть бесконечно много натуральных  $n$ , таких, что для всех  $k < n$  верно  $f(k) = f(n - k)$ .  
(подсказка (может запутать вас):  $C_{n-1}^k$  — натуральное число)