Комбинаторный разнобой

1. 2023 различных натуральных чисел таковы, что сумма любых двух различных из них не равна ни одному из оставшихся. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее из этих чисел?

2. Есть 50 карточек, на них написаны числа от 1 до 50, каждое по одному разу. Костя и Виталик по очереди берут по одной карточке, пока все карточки не будут разобраны. Костя берет первым и хочет добиться того, чтобы сумма чисел на его карточках делилась на 25. Виталик хочет этому помешать. Сможет ли Костя добиться своей цели?

3. В государстве 100 городов. Требуется соединить некоторые пары городов авиарейсами так, чтобы от любого города можно было бы долететь (возможно, с пересадками) до любого другого и чтобы для любых четырех городов A, B, C, D, для которых есть рейсы AB, BC, CD, был и рейс AD. Сколько существует способов это сделать?

4. На клетчатой доске 300×300 по линиям сетки расположено несколько попарно несоприкасающихся кораблей 1×300 (неизвестно, сколько именно). Разрешается сделать k выстрелов по любым клеткам, после чего будет объявлено, какие именно выстрелы попали в какой-то корабль. По этим результатам нужно определить все клетки, занятые кораблями. При каком наименьшем k это гарантированно удастся?

5. Дано натуральное $n > 2$. Множество M состоит из упорядоченных пар натуральных чисел (j, k), $1 \leqslant j < k \leqslant n$. При этом выполнено следующее условие: если $(j, k) \in M$, то $\forall m$ верно $(k, m) \notin M$. Какое наибольшее количество элементов может быть в M?

6. На квадратной доске размером 1002×1002 фишка стартовала из некоторой клетки и совершила обход, переходя каждый раз в соседнюю клетку и закончив в начальной клетке. При этом в каждой клетке она побывала ровно 1 раз. Для какого наименьшего k она может совершить такой обход, что в каждый столбец и в каждую строку она заходила не более k раз? (Начальная клетка не считается заходом куда-либо).

7. У профессора есть n утверждений A_1, A_2, $\ldots$, A_n. Он задает своим аспирантам темы диссертационных работ: «Доказать, что из A_i следует A_j». Все аспиранты очень умны, поэтому, получив задачу, тут же ее решают. Каждая диссертация не должна быть непосредственным логическим следствием ранее доказанных фактов (то есть, например, если было доказано, что из A_1 следует A_2, из A_2 следует A_3, то нельзя просить доказать, что из A_1 следует A_3). Какое максимальное число аспирантов может быть у профессора, чтобы ему хватило тем?