

Линейное программирование

- (а) Хоббит обнаружил в логове дракона серебро, изумруды и сундук, в котором их можно унести. В сундук помещается 100 фунтов серебра или 50 фунтов изумрудов (а можно заполнять сундук частично серебром, частично — изумрудами). Серебро можно будет продать по 20 талеров за фунт, а изумруды — по 30 талеров за фунт. Однако его пони может увезти только 80 фунтов груза. Какое наибольшее количество талеров он сможет получить за сокровища, увезённые за один раз?

(б) Когда хоббит вернулся из похода, оказалось, что изумруды подорожали и теперь стоят 50 талеров за фунт (серебро стоит по-прежнему 20 талеров за фунт). А какова должна быть стратегия хоббита в этом случае?
- (Задача о диете) Толстуха Кэт решила питаться правильно. Подружка ей посоветовала употреблять только продукты А и В (названия зашифрованы, чтобы не создавать рекламу). Дневное питание должно давать не менее 20 единиц белка и не менее 30 килокалорий. В одном килограмме продукта А содержится одна единица белка и одна килокалория, а в килограмме В — одна единица белка и 2 килокалории. Цена килограмма А — 80 у.е., цена килограмма В — 100 у.е. Требуется потратить минимальную сумму и выжить, питаясь этими продуктами. Как?

Определение. Прямой задачей линейного программирования называется задача

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

Точка $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющая всем неравенствам, называется допустимым планом, а допустимый план, реализующий максимум функции $f(x)$, называется оптимальным планом.

- Докажите, что множество допустимых планов выпукло.
- Приведите пример задачи, в которой:
 - допустимый план не существует;
 - допустимый план существует, а оптимального плана нет;
 - существует несколько оптимальных планов.

Определение. Точка называется крайней для выпуклого множества, если она не является серединой никакого отрезка, лежащего в этом выпуклом множестве. В случае многогранников это просто вершины.

- Пусть X и Y — допустимые планы, и оптимальный план лежит на отрезке XY . Докажите, что один из планов X или Y также является оптимальным.
 - Докажите, что один из оптимальных планов (если таковые есть) достигается в крайней точке (если таковые есть) множества допустимых планов.

6. Пусть X — оптимальный план. Некоторые из неравенств $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$ при этом обратились в равенство. Докажите, что остальные можно вообще исключить, и X будет оптимальным планом новой задачи.

Определение. Двойственная задача линейного программирования строится так:

$$g(y_1, y_2, \dots, y_k) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_ky_k \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{k1}y_k \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{k2}y_k \geq c_2 \\ \vdots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{kn}y_k \geq c_n \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_k \geq 0 \end{cases}$$

7. (a) Пусть X — допустимый план прямой задачи, а Y — допустимый план двойственной задачи. Докажите, что $f(X) \leq g(Y)$.
- (b) Пусть одно из неравенств исходной задачи можно исключить так, чтобы оптимальный план остался прежним. Докажите, что в двойственной задаче можно приравнять к нулю одну из переменных так, чтобы оптимальный план в этой задаче остался прежним.
- (c) Если $f(x)$ неограничено, то множество допустимых планов двойственной задачи пусто.
- (d) (Теорема двойственности) Пусть X^* — оптимальный план прямой задачи, а Y^* — оптимальный план двойственной задачи. Докажите, что $f(X^*) = g(Y^*)$.
- (e) Пусть оптимальный план прямой задачи существует. Докажите, что существует оптимальный план двойственной задачи.
8. (Транспортная задача) Поставщики товара - оптовые коммерческие предприятия B_1, B_2, \dots, B_k имеют запасы товаров соответственно в количестве b_1, b_2, \dots, b_k единиц. Розничные торговые предприятия C_1, C_2, \dots, C_n подали заявки на закупку товаров в объемах соответственно: c_1, c_2, \dots, c_n единиц товара. Стоимость перевозки единицы товара с i -го склада j -му предприятию составляет a_{ij} . Надо найти такой план перевозки груза от поставщиков к потребителям, чтобы совокупные затраты на перевозку были минимальными.
- Пусть такой оптимальный план выражается в виде таблицы $(x_{ij})_{i=1\dots k, j=1\dots n}$, где x_{ij} — количество единиц товара, перевезённого с i -го склада на j -е предприятие. Докажите, что все x_{ij} , кроме, может быть, $k + n - 1$ числа, равны нулю.
9. Петя зажимает в одном кулаке рублёвую монету, а в другом — двухрублёвую. Вероятность p , с которой Петя зажимает в левом кулаке рубль, он может установить по своему усмотрению. Вася указывает на левую или правую руку Пети и получает монету в соответствующей руке. Вася выбирает левую руку с вероятностью r (r он может выбрать как захочет). За одну игру с Васи берётся плата. Какой должна быть эта плата, чтобы игра оказалась честной?