Векторные пространства. Базисы и размерности

Под *полем* в этом листике мы будем подразумевать одно из следующих множеств: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$.

Неформальное определение. Линейным (или векторным) пространством над полем F называется любое множество V, элементы которого можно складывать между собой, можно умножать на элементы поля F, и при этом выполняются очевидные свойства линейности.

Формальное определение. Линейное, или векторное, пространство $V(F)$ над полем F — это четвёрка $(V, F, +, \cdot)$, где $+$ — это операция сложения элементов из V (векторов), $\cdot$ — операция умножения элемента F на вектор. При этом выполнены свойства:

- сложение векторов коммутативно $(x + y = y + x)$, ассоциативно $((x + y) + z = x + (y + z))$, также в множестве V есть нулевой вектор 0, такой что $0 + x = x$ для любого x, и у каждого вектора x есть противоположный по сложению вектор $-x$, такой что $x + (-x) = 0$;
- для любых $\alpha, \beta \in F$ и $x, y \in V$ выполняется
  - ассоциативность умножения: $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,
  - унитарность: $1 \cdot x = x$, где 1 — единичный элемент поля F,
  - две дистрибутивности: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ и $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Примеры линейных пространств:

- пространство векторов на плоскости (а также в трёхмерном пространстве) над полем $\mathbb{R}$;
- пространство функций, определённых на отрезке $[a, b]$ над полем $\mathbb{R}$;
- пространство многочленов от k переменных над полем $\mathbb{R}$.

1. Являются ли следующие множества векторными пространствами (над полем $\mathbb{R}$, если не указано обратное) относительно естественных операций:

(a) $\mathbb{C}$;
(b) решения произвольной СЛУ от n переменных;
(c) решения однородной СЛУ от n переменных;
(d) многочлены, имеющие фиксированный корень x_0;
(e) многочлены степени ровно 2021;
(f) многочлены степени не выше 1000000;
(g) неубывающие последовательности вещественных чисел;
(h) строки длины n действительных чисел с нулевой суммой;
(i) бесконечные периодические последовательности остатков по простому модулю p над полем $\mathbb{Z}_p$;
(j) $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$;
(k) функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ (над $\mathbb{Q}$);
(l) функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ (над $\mathbb{R}$);
(m) функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (над $\mathbb{Q}$)?

Определение. Набор векторов $v_1, \dots, v_n \in V$ называется *линейно зависимым*, если существуют числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$, не все равные нулю, такие что $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$. В противном случае набор называется *линейно независимым.*

Определение. Набор линейно независимых векторов $e_1, \dots, e_n \in V$ называется *базисом*, если любой вектор $v \in V$ представим в виде линейной комбинации векторов $e_1, \dots, e_n$, то есть существуют такие числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$, что $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$.

2. **(a)** Пусть каждый из векторов $u_1, \dots, u_m$ представим в виде линейной комбинации векторов $v_1, \dots, v_n$. Пусть $m > n$. Докажите, что векторы $u_1, \dots, u_m$ линейно зависимы.

(b) Пусть векторное пространство V имеет два базиса $u_1, \dots, u_n$ и $v_1, \dots, v_m$. Докажите, что $m = n$.

Определение. Число элементов в базисе называется *размерностью* пространства. *(Бывают пространства с бесконечными базисами и, соответственно, с бесконечной размерностью. Мы их рассматривать не будем).*

3. Пусть в пространстве размерности n выбрана линейно независимая система $v_1, \dots, v_k$. Докажите, что ее можно дополнить до базиса, то есть выбрать такие векторы $v_{k+1}, \dots, v_n$, что набор $v_1, \dots, v_n$ образует базис.

4. Пусть V — конечномерное пространство. Докажите, что любое его подпространство U тоже конечномерно. *(Подпространство в пространстве V — любое подмножество в V, являющееся линейным пространством относительно тех же операций).*

5. Елизавета Андреевна и Андрей Константинович независимо друг от друга привели одну и ту же систему линейных уравнений к ступенчатому виду. При этом у Елизаветы Андреевны получилось k свободных переменных, а у Андрея Константиновича — l. Докажите, что $k = l$.

6. Пусть последовательность a_n задана рекуррентным соотношением $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$; значения a_1 и a_2 выбираются произвольно. Пусть корни многочлена $x^2 - \alpha x - \beta$ — различные действительные числа u и v.
(a) Докажите, что для любых $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ последовательность $a_n = C_1 u^n + C_2 v^n$ удовлетворяет рекуррентному соотношению.
(b) Существуют ли другие последовательности, удовлетворяющие нашему соотношению?