Частично упорядоченные множества

Определение. *Бинарным отношением на множестве* M называется любое подмножество $R \subset M \times M$.

Если выпоняется $(a, b) \in R$, пишут aRb и говорят, что a и b находятся в отношении R или что a и b связаны отношением R.

Определение. *Частично упорядоченным множеством* называют пару $\langle M, \preceq \rangle$, где M — множество, а $\preceq$ — бинарное отношение на множестве M, обладающее следующими свойствами:

1. Для любого $a \in M$ выполняется $a \preceq a$ *(рефлексивность).*
2. Для любых $a, b, c \in M$ из того, что $a \preceq b$ и $b \preceq c$, следует $a \preceq c$ *(транзитивность).*
3. Для любых $a, b \in M$ из того, что $a \preceq b$ и $b \preceq a$, следует $a = b$ *(антисимметричность).*

Такое отношение $\preceq$ называется *частичным порядком.* Если $a \preceq b$, говорят, что *a предшествует b.* Если $a \preceq b$ и $a \neq b$, то говорят, что *a строго предшествует b*, и пишут $a \prec b$.

Еще на частно упорядоченные множества (ЧУМы) можно смотреть как на ориентированные графы. Действительно, рассмотрим граф, в котором вершины соотвествуют элементам M, а ребро проводится из b в a, если $a \prec b$. Убедитесь, что в таком графе нет петель, кратных ребер и циклов!

Определение. *Цепью* в частично упорядоченном множестве называется последовательность элементов $a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_n$, *антицепью* называется набор $a_1, \ldots, a_n$, в котором никакие a_i и a_j не сравнимы при $i \neq j$, то есть, не выполняется ни $a_i \preceq a_j$, ни $a_j \preceq a_i$.

Напоминание (Теорема Кёнига). В двудольном графе размер максимального паросочетания равен размеру минимального вершинного покрытия.

1. **Теорема Мирского.** Докажите, что в конечном частично упорядоченном множестве размер максимальной цепи равен минимальному количеству антицепей, на которые оно разбивается.

2. **Теорема Дилуорса.** Докажите, что в конечном частично упорядоченном множестве размер максимальной антицепи равен минимальному количеству цепей, на которые оно разбивается. *(Указание: рассмотрите двудольный граф, доли которого состоят из копий элементов ЧУМа, а ребро проводится между копией u в левой доле и копией v в правой, если $u \prec v$, а затем примените теорему Кёнига.)*

3. Для данных натуральных r и s покажите, что любая последовательность различных чисел длины $rs+1$ содержит монотонно возрастающую подпоследовательность длины $r+1$ или монотонно убывающую длины $s+1$.

4. Дан набор из $mn+1$ отрезка на прямой. Докажите, что найдется или множество из $n+1$ попарно не пересекающихся отрезков, или множество из $m+1$ отрезка, общее пересчение которых непусто.

5. Давид купил в магазине прямую, на которой выделен конечный набор отрезков. Дома он заметил, что среди любых $k + 1$ отрезка найдутся два пересекающихся ($k > 0$). Докажите, что он может отметить на прямой k точек таким образом, что на каждом отрезке хотя бы одна точка оказалась отмеченной.

6. В чемпионате по футболу участвуют 30 команд разной силы игры, и футбольный эксперт точно знает, как именно команды упорядочены по силе. За одну операцию разрешается предложить эксперту список из трёх команд, и он на своё усмотрение назовёт либо самую сильную, либо самую слабую команду из этих трёх (при этом дополнительно сообщив, сильную или слабую команду он назвал). Определите максимально число k, для которого с помощью нескольких операций можно найти такую последовательность команд $T_1, T_2, \ldots, T_k$, что для всех $1 \leqslant i < j \leqslant k$ команда T_i гарантированно слабее команды T_j.

7. Дан граф G с хроматическим числом $\chi(G)$. Докажите, что при любой правильной раскарске его вершин в $\chi(G)$ цветов найдется путь длины $\chi(G)$, все вершины в котром разного цвета.

8. В турнире по шахбоксу участвовал n^2+1 спортсмен. В ходе турнира каждый спортсмен сразился с каждым в ровно одном из двух видов спорта (в шахматах или в боксе), ничьих не было. Оказалось, что нет ни набора спортсменов, которые бы по кругу обыграли друг друг в шахматы, ни набора спорстменов, которые бы по кругу победили друг у друга в боксерских поединках. Докажите, что можно выбрать один вид спорта и n спортсменов $s_1, \ldots, s_n$ так, чтобы для $i = 2, \ldots n$ в ходе турнира s_i победил s_{i-1} именно в этом виде спорта.