Частично упорядоченные множества

Определение. *Бинарным отношением на множестве* M называется любое подмножество $R \subset M \times M$.

Если выпоняется $(a, b) \in R$, пишут aRb и говорят, что a и b находятся в отношении R или что a и b связаны отношением R.

Определение. *Частично упорядоченным множеством* называют пару $\langle M, \preceq \rangle$, где M — множество, а $\preceq$ — бинарное отношение на множестве M, обладающее следующими свойствами:

1. Для любого $a \in M$ выполняется $a \preceq a$ *(рефлексивность)*.
2. Для любых $a, b, c \in M$ из того, что $a \preceq b$ и $b \preceq c$, следует $a \preceq c$ *(транзитивность)*.
3. Для любых $a, b \in M$ из того, что $a \preceq b$ и $b \preceq a$, следует $a = b$ *(антисимметричность)*.

Такое отношение $\preceq$ называется *частичным порядком*. Если $a \preceq b$, говорят, что *a предшествует b*. Если $a \preceq b$ и $a \neq b$, то говорят, что *a строго предшествует b*, и пишут $a \prec b$.

Еще на частчно упорядоченные множества (ЧУМы) можно смотреть как на ориентированные графы. Действительно, рассмотрим граф, в котором вершины соотвествуют элементам M, а ребро проводится из b в a, если $a \prec b$. Убедитесь, что в таком графе нет петель, кратных ребер и циклов!

Определение. *Цепью* в частично упорядоченном множестве называется последовательность элементов $a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_n$, *антицепью* называется набор $a_1, \ldots, a_n$, в котором никакие a_i и a_j не сравнимы при $i \neq j$, то есть, не выполняется ни $a_i \preceq a_j$, ни $a_j \preceq a_i$.

Напоминание (Теорема Кёнига). В двудольном графе размер максимального паросочетания равен размеру минимального вершинного покрытия.

1. **Теорема Мирского.** Докажите, что в конечном частично упорядоченном множестве размер максимальной цепи равен минимальному количеству антицепей, на которые оно разбивается.

2. **Теорема Дилуорса.** Докажите, что в конечном частично упорядоченном множестве размер максимальной антицепи равен минимальному количеству цепей, на которые оно разбивается. *(Указание: рассмотрите двудольный граф, доли которого состоят из копий элементов ЧУМа, а ребро проводится между копией u в левой доле и копией v в правой, если $u \prec v$, а затем примените теорему Кёнига.)*

3. Для данных натуральных r и s покажите, что любая последовательность различных чисел длины $rs+1$ содержит монотонно возрастающую подпоследовательность длины $r + 1$ или монотонно убывающую длины $s + 1$.

4. Давид купил в магазине прямую, на которой выделен конечный набор отрезков. Дома он заметил, что среди любых $k + 1$ отрезка найдутся два пересекающихся

($k > 0$). Докажите, что он может отметить на прямой k точек таким образом, что на каждом отрезке хотя бы одна точка оказалась отмеченной.

5. В чемпионате по футболу участвуют 30 команд разной силы игры, и футбольный эксперт точно знает, как именно команды упорядочены по силе. За одну операцию разрешается предложить эксперту список из трёх команд, и он на своё усмотрение назовёт либо самую сильную, либо самую слабую команду из этих трёх (при этом дополнительно сообщив, сильную или слабую команду он назвал). Определите максимально число k, для которого с помощью нескольких операций можно найти такую последовательность команд $T_1, T_2, \ldots, T_k$, что для всех $1 \leqslant i < j \leqslant k$ команда T_i гарантированно слабее команды T_j.

6. Дан граф G с хроматическим числом $\chi(G)$. Докажите, что при любой правильной раскарске его вершин в $\chi(G)$ цветов найдется путь длины $\chi(G)$, все вершины в котром разного цвета.

7. Дано целое число $n > 1$. На горном склоне расположено n^2 фуникулёрных станций наразных высотах. Каждая из двух фуникулёрных компаний A и B владеет k подъёмниками. Каждый подъёмник осуществляет регулярный беспересадочный трансфер с одной из станций на другую, более высоко расположенную станцию. k трансферов компании A начинаются на k различных станциях, также они заканчиваются на k различных станциях, при этом трансфер, который начинается выше, и заканчивается выше. Те же условия выполнены для компании B. Будем говорить, что две станции связаны фуникулёрной компанией, если можно добраться из нижней станции в верхнюю, используя один или несколько трансферов данной компании (другие перемещения между станциями запрещены). Найдите наименьшее k, при котором заведомо найдутся две станции, связанные обеими компаниями.

8. Витя и Егор играют в такую игру: Великий Генератор Случайности выдает каждому из них по 100 различных действительных чисел, причем наборы чисел у игроков не пересекаются. Дальше по некоторому правилу определяется победитель.

Они договорились, что Егор может сам придумать это правило перед началом игры, но оно должно обязательно удовлетворять трем выдвинутым Витей «условиям разумности». Во-первых, выбор победителя зависит только от относительного порядка получившихся двухсот чисел, то есть, если бы эти 200 чисел выписали в ряд в порядке возрастания, и сказали бы, на каких позициях теперь стоят числа, принадлежащие каждому из игроков, этой инфромации бы хватило для определения победителя. Во-вторых, если у первого игрока числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{100}$, а у второго — $b_1 < b_2 < \ldots < b_{100}$ и $a_i > b_i$ при всех i, то выигрывает первый. В-третьих, если игрок с набором A побеждает игрока с набором B, а игрок с набором B — игрока с набором C, и наборы A и C не перескаются, то игрок с набором A побеждает игрока с набором C.

Сколькими способами Егор может придумать такое правило?