# Системы линейных уравнений — II

Напомним, что система линейных уравнений имеет единственное решение тогда и только тогда, когда соответствующая ей однородная система линейных уравнений имеет единственное решение.

**1.** У вас есть чашечные весы и 100 выхухолей, которые весят одинаково. Вы радостно сообщаете Елизавете Андреевне, что вес всех выхухолей одинаков. Однако Елизавета Андреевна не верит на слово и просит доказательств. Докажите, что вам потребуется не менее 99 взвешиваний, если Елизавета Андреевна готова поверить, что вес выхухоли является
**(a)** действительным числом;
**(b)** положительным действительным числом.
*(За одно взвешивание можно убедить Елизавету Андреевну, что веса некоторых двух наборов выхухолей совпадают).*

**2.** Есть 101 корова. Если убрать любую корову, то оставшихся можно поделить на две части, равные по весу и численности. Докажите, что коровы весят одинаково, если вес каждой коровы
**(a)** натуральный;
**(b)** рациональный;
**(c)** вещественный.

**3.** На доске выписано 100
**(a)** целых;
**(b)** действительных чисел.
Известно, что для любых восьми из этих чисел найдутся такие девять из этих чисел, что среднее арифметическое этих восьми чисел равно среднему арифметическому этих девяти чисел. Докажите, что все числа равны.

**4.** Внутри отрезка $[0;1]$ выбрали $n$ различных точек. *Отмеченной точкой* назовём одну из $n$ выбранных или конец отрезка. Оказалось, что любая из внутренних $n$ точек является серединой какого-то отрезка с вершинами в отмеченных. Докажите, что все точки рациональные.

**5.** Квадрат со стороной 1 разрезан на квадраты. Докажите, что сторона каждого квадрата рациональна.

**6.** 24 школьника решали 25 задач. У преподавателя есть таблица размером $24 \times 25$, в которой записано, кто какие задачи решил. Оказалось, что каждую задачу решил хотя бы один школьник. Докажите, что
**(a)** можно отметить некоторые из задач знаком $A$, а некоторые из остальных — знаком $B$ и приписать каждой задаче некоторое натуральное число баллов так, чтобы каждый школьник набрал за задачи, отмеченные знаком $A$, столько же баллов, сколько и за задачи, отмеченные знаком $B$;
**(b)** можно отметить некоторые задачи так, что каждый из школьников решил чётное число (в частности, может быть, ноль) отмеченных задач.

**7.** Пусть $A_1, \ldots, A_{n+1}$ — непустые подмножества $\{1, \ldots, n\}$ (необязательно различные). Докажите, что существуют непустые непересекающиеся подмножества $I, J$ множества $\{1, \ldots, n+1\}$, такие, что $\cup_{k \in I} A_k = \cup_{l \in J} A_l$.