Тренировочная олимпиада №3

1. По итогам предварительного турнира в финал чемпионата по городкам прошли пятеро участников. Финал проводится по следующей схеме. Сначала играется матч между игроками, занявшими в предварительном турнире 5-е и 4-е места. Проигравшему в этом матче присуждается пятый приз, а победивший играет матч с игроком, занявшим в предварительном турнире 3-е место. Проигравшему в этом матче присуждается четвертый приз, а победивший играет матч с игроком, занявшим в предварительном турнире 2-е место. Проигравшему в этом матче присуждается третий приз, а победивший играет матч с игроком, занявшим в предварительном турнире 1-е место. Проигравшему в этом матче присуждается второй приз, а победившему — первый приз.

Сколькими способами могут распределиться призы в финале? (Считается известным, как распределились места в предварительном турнире).

2. Для каждого натурального $n \geqslant 2$ и произвольных неотрицательных вещественных $x_1, \ldots, x_n$ докажите неравенство:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)} \geqslant 1 + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}.$$

3. В четырёхугольнике $ABCD$ углы A и C — прямые. На сторонах AB и CD как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках X и Y. Докажите, что прямая XY проходит через середину диагонали AC.

4. Докажите, что для любого натурального n существует натуральное m, такое, что m делится на n и сумма цифр числа m равна n.

5. Пусть S — n-элементное множество, $k \leqslant n$ — нечетное натуральное число. Какое наибольшее количество подмножеств множества S можно выбрать так, чтобы симметрическая разность каждой пары выбранных подмножеств состояла не из ровно k элементов? (Симметрической разностью двух множеств A и B называется множество $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, или, по другому, множество, состоящее из элементов, принадлежащих ровно одному из множеств A и B).