Классические неравенства

1. Для положительных чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n, x_{n+1} докажите неравенство:

$$(n+1)\sqrt[n+1]{x_1x_2\ldots x_nx_{n+1}} - n\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \leqslant x_{n+1}.$$

2. Вещественные числа a, b, c и d таковы, что $a+b > |c-d|$ и $c+d > |a-b|$. Докажите, что $a+c > |b-d|$.

3. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0,1]$. Докажите, что

$$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n) \geqslant 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_n.$$

4. Пусть $x, y, z \in [0,1]$. Докажите, что

$$\frac{x^2}{1+x+xyz} + \frac{y^2}{1+y+xyz} + \frac{z^2}{1+z+xyz} \leqslant 1.$$

5. Пусть $P(n) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}$. Докажите, что:

(a) $P(n) < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

(b) $P(n) < \dfrac{1}{\sqrt{3n}}$.

6. Пусть $x, y, z \in [0,1)$ и $x^2+y^2+z^2 = 1$. Найдите минимальное значение выражения

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}.$$