Постновогодний синдром

1. На плоскости расположены две окружности, а также дано некоторое положительное число $k \neq 1$. Для точки X вне окружностей проведем к ним касательные XA и XB. Как может быть устроено ГМТ таких точек X, что $AX : BX = k$?

2. Дан неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle B = 135^\circ$. Пусть M — середина отрезка AC. Точка O — центр окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Луч BM вторично пересекает окружность Ω в точке D. Докажите, что центр окружности Γ, описанной около треугольника BOD, лежит на прямой AC.

3. Точки M и N — середины сторон AB и AC треугольника ABC. Касательная ℓ к описанной окружности треугольника ABC в точке A пересекает прямую BC в точке K. Докажите, что описанная окружность треугольника MKN касается ℓ.

4. На стороне AB треугольника ABC выбраны точки C_1 и C_2. Аналогично, на стороне BC выбраны точки A_1 и A_2, а на стороне AC — точки B_1 и B_2. Оказалось, что отрезки A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 имеют равные длины, пересекаются в одной точке, и угол между любыми двумя из них равен 60°. Докажите, что $\dfrac{A_1A_2}{BC} = \dfrac{B_1B_2}{CA} = \dfrac{C_1C_2}{AB}$.

5. Треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Прямая AO вторично пересекает окружность ω в точке A'. M_B и M_C — середины сторон AC и AB соответственно. Прямые $A'M_B$ и $A'M_C$ пересекают окружность ω вторично в точках B' и C', а также пересекают сторону BC в точках D_B и D_C соответственно. Описанные окружности треугольников CD_BB' и BD_CC' пересекаются в точках P и Q. Докажите, что точки O, P и Q лежат на одной прямой.

6. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается стороны BC в точке D. Прямая AD пересекает ω в точке $L \neq D$. Точка K — центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны BC. Точки M и N — середины отрезков BC и KM. Докажите, что $\angle BLD = \angle CLN$.

Системы линейных уравнений — II

Напомним, что система линейных уравнений имеет единственное решение тогда и только тогда, когда соответствующая ей однородная система линейных уравнений имеет единственное решение.

1. Докажите, что если все коэффициенты в системе линейных уравнений рациональны, и у системы есть хотя бы одно решение, то у неё есть и решение в рациональных числах.

2. У вас есть чашечные весы и 100 выхухолей, которые весят одинаково. Вы радостно сообщаете Елизавете Андреевне, что вес всех выхухолей одинаков. Однако Елизавета Андреевна не верит на слово и просит доказательств. Докажите, что вам потребуется не менее 99 взвешиваний, если Елизавета Андреевна готова поверить, что вес выхухоли является
(a) действительным числом;
(b) положительным действительным числом.
(За одно взвешивание можно убедить Елизавету Андреевну, что веса некоторых двух наборов выхухолей совпадают).

3. Есть 101 корова. Если убрать любую корову, то оставшихся можно поделить на две части, равные по весу и численности. Докажите, что коровы весят одинаково, если вес каждой коровы
(a) натуральный;
(b) рациональный;
(c) вещественный.

4. На доске выписано 100
(a) целых;
(b) действительных чисел.
Известно, что для любых восьми из этих чисел найдутся такие девять из этих чисел, что среднее арифметическое этих восьми чисел равно среднему арифметическому этих девяти чисел. Докажите, что все числа равны.

5. Внутри отрезка $[0;1]$ выбрали n различных точек. *Отмеченной точкой* назовём одну из n выбранных или конец отрезка. Оказалось, что любая из внутренних n точек является серединой какого-то отрезка с вершинами в отмеченных. Докажите, что все точки рациональные.

6. Квадрат со стороной 1 разрезан на квадраты. Докажите, что сторона каждого квадрата рациональна.