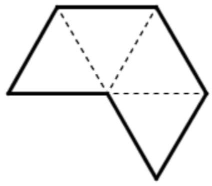
Тренировочная олимпиада №2

1. Огороженное поле 1×1 км разбито несколькими заборами на прямоугольные участки 5×20 м и 6×12 м. Найдите суммарную длину всех заборов.

2. Существует ли треугольник со сторонами x, y и z такой, что $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y)(y + z)(z + x)$?

3. Можно ли правильный шестиугольник со стороной длины n (n — натуральное число) разрезать на фигурки, составленные из четырех равносторонних треугольников со стороной 1 (см. рис)?



4. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Продолжение медианы, проведённой из вершины B, пересекает описанную окружность ω треугольника ABC в точке D. Через центр описанной окружности треугольника BDL проведена прямая l, параллельная прямой AC. Докажите, что l касается ω.

5. Даны натуральные взаимно простые числа a и b. Таня написала на доске натуральное число $t < b$. Каждую секунду число x на доске заменяется на наименьшее натуральное из четырёх чисел $\{x - a, x + a, x - b, x + b\}$, которое ещё не появлялось на доске до этого. Докажите, что этот процесс будет продолжаться бесконечно долго, причём каждое натуральное число когда-нибудь будет выписано.