Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных уравнений (СЛУ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Две СЛУ от переменных $x_1, \ldots, x_n$ назовём *эквивалентными*, если у них совпадают множества решений. Рассмотрим следующие элементарные преобразования:

- поменять местами две строки;
- умножить строку на ненулевое число;
- прибавить к строке другую строку, умноженную на число.

СЛУ называется *однородной*, если все её правые части равны 0, в противном случае СЛУ называется *неоднородной*.

1. **(a)** Докажите, что если одну СЛУ можно получить из другой СЛУ при помощи последовательного применения элементарных преобразований, то они эквивалентны.
(b) Верно ли, что если есть две эквивалентные СЛУ с одинаковым числом уравнений и переменных, то одну из них можно получить из другой при помощи элементарных преобразований?

2. **Метод Гаусса.** Докажите, что при помощи элементарных преобразований каждую СЛУ можно привести к ступенчатому виду, то есть к виду

$$\begin{cases} b_{1k}x_k + \ldots + b_{1n}x_n = d_1, \\ b_{2l}x_l + \ldots + b_{2n}x_n = d_2, \\ \ldots \\ b_{rs}x_s + \ldots + b_{rn}x_n = d_r, \\ 0 = d_{r+1}, \\ \ldots \\ 0 = d_m. \end{cases}$$

где $b_{1k}, b_{2l}, \ldots, b_{rs}$ не равны 0, а также $k < l < \ldots < s$.
Замечание: Из метода Гаусса следует, что переменные $x_k, x_l, \ldots, x_s$ (называемые *главными*) выражаются через остальные переменные (называемые *свободными*), которые могут принимать любые значения.

3. Сколько решений может быть у СЛУ?

4. Докажите, что если в однородной СЛУ неизвестных больше, чем уравнений, то у неё есть ненулевое решение. Верно ли то же для неоднородной СЛУ?

5. **(a)** Докажите, что если у однородной СЛУ с равным количеством уравнений и неизвестных не одно решение, то одно из её уравнений следует из остальных (то есть множество его решений содержит пересечение множеств решений остальных). **(b)** В однородной системе уравнений на одно меньше, чем неизвестных. Докажите, что если не все решения пропорциональны, то одно из уравнений следует из остальных.

6. **(a)** Докажите, что разность любых двух решений неоднородной СЛУ является решением однородной СЛУ.
(b) Докажите, что у неоднородной СЛУ либо нет решений, либо их столько же, сколько у однородной.

7. Имеется система уравнений

$$\begin{cases} *x + *y + *z = 0, \\ *x + *y + *z = 0, \\ *x + *y + *z = 0. \end{cases}$$

Два человека вписывают по очереди вместо звездочек числа. Докажите, что начинающий всегда может добиться того, чтобы система имела ненулевое решение.

8. Имеется клетчатая таблица размера $(k+2)$ на $(l+2)$, в её граничных клетках расставлены какие-то действительные числа. Докажите, что в клетках центрального прямоугольника размера k на l можно расставить числа так, чтобы каждое из этих kl чисел равнялось среднему арифметическому своих четырёх соседей по стороне.

9. Пусть $P(x, y)$ — произвольный многочлен второй степени. Назовем множество точек на координатной плоскости, в которых $P(x, y)$ обращается в 0, кривой второго порядка. На плоскости даны 5 точек, никакие 4 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что существует единственная кривая второго порядка, проходящая через них.