Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему линейных уравнений (СЛУ)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Две СЛУ от переменных $x_1, \dots, x_n$ назовём *эквивалентными*, если у них совпадают множества решений. Рассмотрим следующие элементарные преобразования:

- поменять местами две строки;
- умножить строку на ненулевое число;
- прибавить к строке другую строку, умноженную на число.

СЛУ называется *однородной*, если все её правые части равны 0, в противном случае СЛУ называется *неоднородной*.

0. ***Сдавать не нужно!*** Если одна СЛУ получается из другой путем применения элементарных преобразований, то эти системы эквивалентны.

1. **Метод Гаусса.** Докажите, что при помощи элементарных преобразований каждую СЛУ можно привести к ступенчатому виду, то есть к виду

$$\begin{cases} b_{1k}x_k + \ldots + b_{1n}x_n = d_1, \\ b_{2l}x_l + \ldots + b_{2n}x_n = d_2, \\ \dots \\ b_{rs}x_s + \ldots + b_{rn}x_n = d_r, \\ 0 = d_{r+1}, \\ \dots \\ 0 = d_m. \end{cases}$$

где $b_{1k}, b_{2l}, \dots, b_{rs}$ не равны 0, а также $k < l < \ldots < s$.
Замечание: Из метода Гаусса следует, что переменные $x_k, x_l, \dots, x_s$ (называемые *главными*) выражаются через остальные переменные (называемые *свободными*), которые могут принимать любые значения.

2. Сколько решений может быть у СЛУ?

3. Докажите, что если в однородной СЛУ неизвестных больше, чем уравнений, то у неё есть ненулевое решение. Верно ли то же для неоднородной СЛУ?

4. **(a)** Докажите, что разность любых двух решений неоднородной СЛУ является решением однородной СЛУ.
(b) Докажите, что у неоднородной СЛУ либо нет решений, либо их столько же, сколько у однородной.

5. Докажите, что если все коэффициенты в СЛУ рациональны, и есть хотя бы одно решение этой СЛУ, то у неё есть и решение в рациональных числах.

6. На плоскости проведены три красные и три синие прямые и отмечено 9 точек пересечения разноцветных прямых (будем считать, что все эти точки существуют и различны). Докажите, что если восемь из этих точек лежат на кривой, заданной многочленом третьей степени, то и девятая точка также лежит на этой кривой.

7. Имеется клетчатая таблица размера $(k+2)$ на $(l+2)$, в её граничных клетках расставлены какие-то действительные числа. Докажите, что в клетках центрального прямоугольника размера k на l можно расставить числа так, чтобы каждое из этих kl чисел равнялось среднему арифметическому своих четырёх соседей по стороне.

8. Участникам тестовой олимпиады было предложено n вопросов. Жюри определяет сложность каждого из вопросов: целое положительное количество баллов, получаемых участниками за правильный ответ на вопрос. За неправильный ответ начисляется 0 баллов, все набранные участником баллы суммируются. Когда все участники сдали листки со своими ответами, оказалось, что жюри так может определить сложность вопросов, чтобы места между участниками распределились любым наперед заданным образом. При каком наибольшем числе участников это могло быть?