Формальные степенные ряды

Формальным степенным рядом будем называть бесконечную сумму $F(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, где a_k — вещественные (или комплексные) коэффициенты формального ряда.

Операции над формальными рядами:

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$
2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} x^k$
3. $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$.

Замечание. В контексте этого листика формальные ряды не являются функциями от x, а скорее бесконечными последовательностями коэффициентов, на которых определены три операции выше.

1. Докажите, что умножение формальных рядов ассоциативно, то есть

$$F(x) \cdot (G(x) \cdot H(x)) = (F(x) \cdot G(x)) \cdot H(x).$$

2. **(a)** Найдите обратный формальный ряд для ряда $F(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k x^k$, то есть такой ряд $F^{-1}(x)$, что $F(x)F^{-1}(x) = 1$.
(b) При каких условиях у ряда $F(x)$ сущестует обратный?

Замечание. Таким образом, на многие формальные ряды также можно делить.

3. Найдите множество формальных рядов, являющихся решениями дифференциального уравнения **(a)** $F'(x) = F(x)$; **(b)** $F''(x) = F(x)$.

Посмотрим как формальные ряды могут использоваться для решения линейных рекуррентных соотношений.

Пусть $F(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, и пусть последовательность (a_i) удовлетворяет **рекуррентному соотношению k-го порядка:**

$$\forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad a_{n+k} + p_{k-1} a_{n+k-1} + \dots + p_0 a_n = 0 \quad (p_0 \neq 0).$$

Характеристическим многочленом этого рекуррентного соотношения называется многочлен

$$c(\lambda) = \lambda^k + p_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + p_0.$$

4. Докажите, что существует такой многочлен $P(x)$, $\deg P < k$, такой, что

$$F(x) = \frac{P(x)}{x^k \cdot c(x^{-1})}.$$

5. Рассмотрим отношение многочленов $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $\deg P < \deg Q$.

(a) Пусть $Q(x) = (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_r)^{k_r}$, где x_i — различные комплексные числа. Докажите, что существует единственный набор многочленов $\{A_i(x)\}_{i=1}^{r}$, $\deg A_i < k_i$, такой, что:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1(x)}{(x - x_1)^{k_1}} + \frac{A_2(x)}{(x - x_2)^{k_2}} + \dots + \frac{A_r(x)}{(x - x_r)^{k_r}};$$

(b) Пусть $Q(x) = (x - a)^n$. Докажите, что существует единственный набор чисел $\{A_i\}_{i=1}^{r}$, такой, что:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x - a)} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x - a)^n};$$

(c) Найдите формальный ряд, обратный к $(x - a)^k$;

(d) Опишите как выглядит множество решений линейной рекурренты с характерестическим многочленом $c(\lambda)$.