Теорема Тверберга

1. Даны n точек на плоскости. Докажите, что на границе круга наименьшего радиуса, содержащего эти точки,
(a) есть по крайней мере две точки из множества;
(b) есть либо по крайней мере три точки из множества, либо две точки из множества, лежащие диаметрально противоположно.

Теорема Тверберга. Пусть в $\mathbb{R}^d$ даны $(r-1)(d+1)+1$ точек. Тогда их можно разбить на непересекающиеся подмножества $P_1, P_2, \ldots, P_r$ так, чтобы у выпуклых оболочек этих подмножеств имелась хотя бы одна общая точка.

2. Выведите из утверждения теоремы Тверберга
(a) теорему о центральной точке для $\mathbb{R}^2$; **(b)** теорему о центральной точке для $\mathbb{R}^d$.

3. Докажите теорему Тверберга для $\mathbb{R}^2$: множество P из $3r-2$ точек на плоскости всегда можно разбить на подмножества $P_1, P_2, \ldots, P_r$, для которых выпуклые оболочки имеют общую точку. Докажите следующие утверждения:
(a) Существует какое-то разделение P и какой-то круг B, пересекающий все $conv(P_i)$.
(b) Если есть разбиение P и B из предыдущего пункта, то можно перераспределить точки между множествами P_i так, чтобы каждое содержало не более трёх точек и B всё ещё продолжал пересекать все $conv(P_i)$. (С этого момента будем считать, что все множества из P_i содержат не более трёх точек.)
(c) Если B содержит внутренние точки всех $conv(P_i)$, то радиус B можно уменьшить (не теряя свойства пересечения с выпуклыми оболочками).
(d) Пусть с некоторыми $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ круг B пересекается только по граничным точкам. Если центр B не лежит внутри выпуклой оболочки точек пересечения (касания) с этими множествами, то B можно чуть-чуть подвинуть и уменьшить радиус, не теряя главного свойства.
(e) Пусть с некоторыми $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ круг B пересекается только по граничным точкам. Если центр B лежит внутри выпуклой оболочки точек касания с этими множествами, то среди этих множеств найдётся хотя бы одно, состоящее из трёх (или более) точек. (Есть пара особых случаев, когда это не так, тогда перераспределите точки P так, чтобы круг можно было уменьшить.)
(f) Если центр B лежит внутри выпуклой оболочки точек касания, как в предыдущем пункте, то он лежит внутри выпуклой оболочки каких-то трёх из точек касания. Тогда можно перераспределить точки множеств $P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}$ так, чтобы хотя бы одна из выпуклых оболочек множеств пересекала B по внутренним точкам.
(g) Если радиус B положителен, то его можно уменьшить и при этом сохранить пересечение со всеми выпуклыми оболочками P_i. Тогда существует такое разбиение P, что B — это одна точка.

4. **Теорема Радона.** Произвольное подмножество из $d+2$ или более точек в $\mathbb{R}^d$ может быть разделено на два непересекающихся подмножества, чьи выпуклые оболочки имеют непустое пересечение.

5. **Теорема Киршбергера для** $\mathbb{R}^2$. Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_r$ — множества точек на плоскости, для которых пересечение их выпуклых оболочек непусто. Тогда существуют подмножества $P_1' \subset P_1, P_2' \subset P_2, \ldots, P_r' \subset P_r$ с суммарным количеством точек равным $3r-2$, такие, что все $conv(P_i')$ имеют хотя бы одну общую точку.

6. Обобщите доказательство теоремы Тверберга для $\mathbb{R}^d$.

7. **Цветная теорема Каратеодори.** Пусть A_1 — множество синих, A_2 — множество красных, а A_3 — множество зелёных точек на плоскости, у которых выпуклые оболочки имеют хотя бы одну общую точку X. Докажите, что тогда X принадлежит какому-то треугольнику с разноцветными вершинами.