

Тренировочная олимпиада №1

1. Каждую грань кубика разбили на четыре одинаковых квадрата, а затем раскрасили эти квадраты в несколько цветов так, что квадраты, имеющие общую сторону, оказались окрашенными в различные цвета. Какое наибольшее количество квадратов одного цвета могло получиться?
2. Множество состоит из целых чисел, причем в нем есть и положительные, и отрицательные числа. Если числа a и b содержатся в множестве, то в нём также содержатся числа $2a$ и $a + b$. Докажите, что это множество содержит разность любых двух своих элементов.
3. a, b, c – стороны треугольника с периметром 1. Докажите неравенство

$$\frac{1+a}{1-2a} + \frac{1+b}{1-2b} + \frac{1+c}{1-2c} \geq 12.$$

4. Точки H и I – соответственно ортоцентр и центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC . На стороне AB отмечена такая точка P , что $AP = AC$. Точка K – проекция точки H на AI , точка Q симметрична P относительно точки K . Докажите, что точки B, H и Q лежат на одной прямой.
5. Дана таблица 100×100 . Для любого k ($1 \leq k \leq 100$), в k -й строке таблицы записаны числа $1, 2, \dots, k$ в возрастающем порядке слева направо, но не обязательно в последовательных клетках; остальные $100 - k$ клеток заполнены нулями. Докажите, что найдутся два столбца, сумма чисел в одном из которых хотя бы в 19 раз превосходит сумму чисел в другом.