

## Тренировочная олимпиада №1

1. Каждую грань кубика разбили на четыре одинаковых квадрата, а затем раскрасили эти квадраты в несколько цветов так, что квадраты, имеющие общую сторону, оказались окрашенными в различные цвета. Какое наибольшее количество квадратов одного цвета могло получиться?
2. Множество состоит из целых чисел, причем в нем есть и положительные, и отрицательные числа. Если числа  $a$  и  $b$  содержатся в множестве, то в нём также содержатся числа  $2a$  и  $a + b$ . Докажите, что это множество содержит разность любых двух своих элементов.
3.  $a, b, c$  – стороны треугольника с периметром 1. Докажите неравенство

$$\frac{1+a}{1-2a} + \frac{1+b}{1-2b} + \frac{1+c}{1-2c} \geq 12.$$

4. Точки  $H$  и  $I$  – соответственно ортоцентр и центр вписанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$ . На стороне  $AB$  отмечена такая точка  $P$ , что  $AP = AC$ . Точка  $K$  – проекция точки  $H$  на  $AI$ , точка  $Q$  симметрична  $P$  относительно точки  $K$ . Докажите, что точки  $B, H$  и  $Q$  лежат на одной прямой.
5. Дана таблица  $100 \times 100$ . Для любого  $k$  ( $1 \leq k \leq 100$ ), в  $k$ -й строке таблицы записаны числа  $1, 2, \dots, k$  в возрастающем порядке слева направо, но не обязательно в последовательных клетках; остальные  $100 - k$  клеток заполнены нулями. Докажите, что найдутся два столбца, сумма чисел в одном из которых хотя бы в 19 раз превосходит сумму чисел в другом.