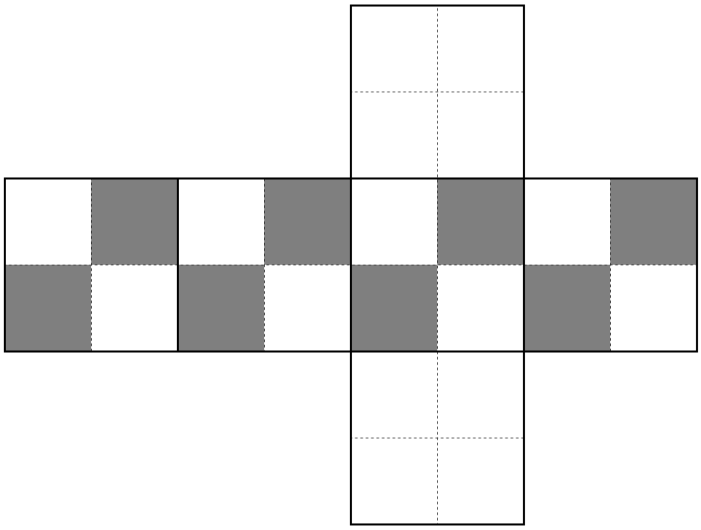
Тренировочная олимпиада №1. Решения

1. Каждую грань кубика разбили на четыре одинаковых квадрата, а затем раскрасили эти квадраты в несколько цветов так, что квадраты, имеющие общую сторону, оказались окрашенными в различные цвета. Какое наибольшее количество квадратов одного цвета могло получиться?

Решение. Докажем от противного, что одноцветных квадратов меньше 9. Пусть возможно получить 9 или больше одноцветных квадратов. Каждый квадрат прилегает к одной вершине куба. У куба 8 вершин, поэтому хотя бы два из наших одноцветных квадратов примыкают к одной и той же вершине куба. Но примыкающие к одной вершине квадраты имеют общую сторону, противоречие.

Пример развертки для 8 квадратов приведен на картинке. Серые квадраты одноцветные, белые можно покрасить, например, в 16 различных цветов.



Ответ: 8 квадратов.

2. Множество состоит из целых чисел, причем в нем есть и положительные, и отрицательные числа. Если числа a и b содержатся в множестве, то в нём также содержатся числа $2a$ и $a+b$. Докажите, что это множество содержит разность любых двух своих элементов.

Решение. Назовем наше множество A. Пусть m_+ — наименьшее положительное число из A, пусть m_- — наибольшее отрицательное число из A. (Оба числа существуют по условию).

Заметим, что $m_+ = -m_-$. Действительно, если $m_+ > -m_-$, то $0 < m_+ + m_- < m_+$, что противоречит минимальности m_+. Случай $m_+ < -m_-$ аналогично невозможен.

Теперь заметим, что $A = \{km_+ | k \in \mathbb{Z}\}$. Действительно, $1 \cdot m_+ \in A$ и если $km_+ \in A$, то $(k+1)m_+ = km_+ + m_+ \in A$ и $(k-1)m_+ = km_+ + m_- \in A$, то есть $A \supset \{km_+ | k \in \mathbb{Z}\}$. Пусть теперь $a \in A$, $a = km_+ + r$, $0 \leqslant r < m_+$. Тогда $r = a + (-km_+) \in A$ (мы уже доказали, что $-km_+ \in A$). Следовательно, $r = 0$, так как иначе получаем противоречие с минимальностью m_+. Поэтому $A = \{km_+ | k \in \mathbb{Z}\}$.

Остается тривиальная проверка. Пусть $a_1 \in A$, $a_2 \in A$. Тогда $a_1 = k_1 m_+$, $a_2 = k_2 m_+$ и $a_1 - a_2 = (k_1 - k_2)m_+ \in A$.

3. a, b, c – стороны треугольника с периметром 1. Докажите неравенство

$$\frac{1+a}{1-2a}+\frac{1+b}{1-2b}+\frac{1+c}{1-2c}\geqslant 12.$$

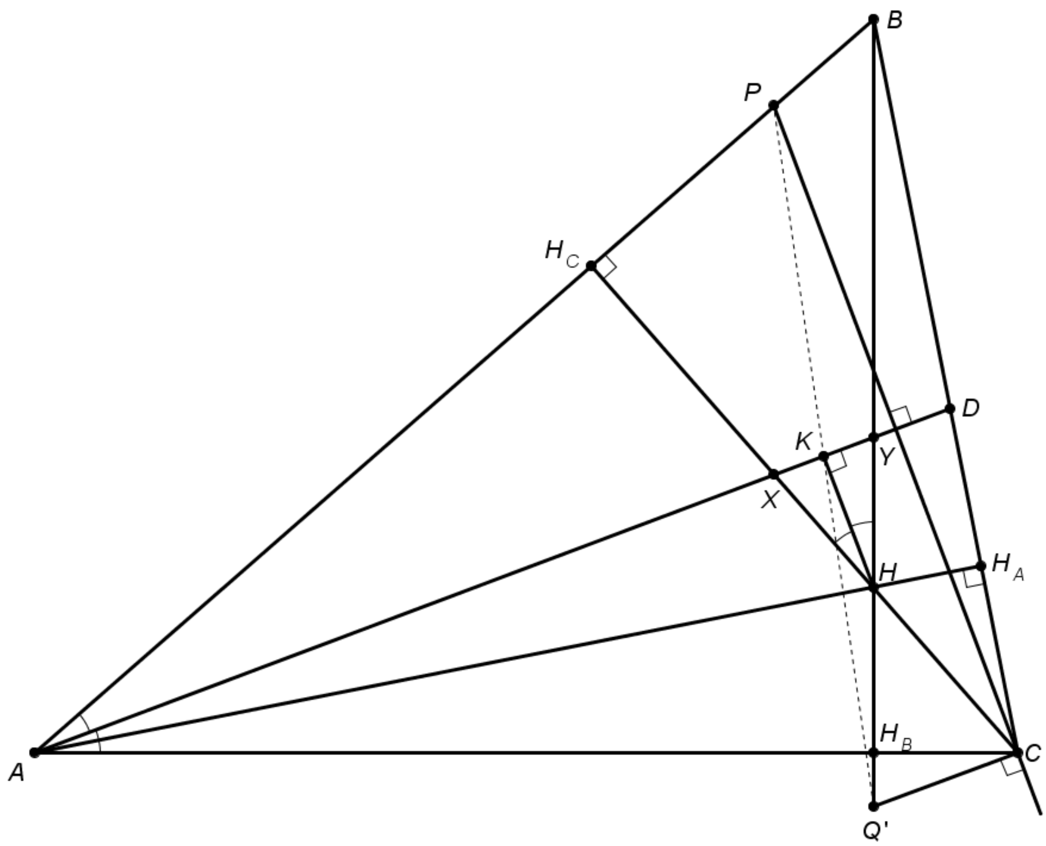
Решение. Перепишем неравенство в виде

$$\frac{2a+b+c}{-a+b+c}+\frac{a+2b+c}{a-b+c}+\frac{a+b+2c}{a+b-c}\geqslant 12.$$

Приведем выражение к общему знаменателю; домножим на знаменатель обе части неравенства. Это можно сделать, так как по неравенству треугольника все знаменатели положительные. После упрощений получаем $T_{3,0,0}+T_{1,1,1}\geqslant 2T_{2,1,0}$. Это верно по неравенству Шура.

4. Точки H и I — соответственно ортоцентр и центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC. На стороне AB отмечена такая точка P, что $AP=AC$. Точка K — проекция точки H на AI, точка Q симметрична P относительно точки K. Докажите, что точки B, H и Q лежат на одной прямой.

Решение.



Пусть H_A, H_B, H_C — основания высот треугольника, AD — биссектриса, $X=CH_C\cap AD$, $Y=BH_B\cap AD$. Пусть Q' — такая точка на BH_B, что $Q'C\perp CP$. Докажем, что K — центр описанной окружности прямоугольного $\triangle PCQ'$. Это будет означать, что K — середина гипотенузы PQ', то есть $Q=Q'$, и задача будет решена.

Пусть $\angle BAC=2\alpha$. Тогда из вписанности четырехугольника AH_CKH $\angle XHK=\alpha$. Из вписанности четырехугольника AH_CHH_B $\angle XHY=2\alpha$. Следовательно, HK — биссектриса и высота $\triangle HXY$, а значит HK — серединный перпендикуляр к XY. Из параллельности AD и CQ' следует подобие $\triangle HXY$ и $\triangle HCQ'$. Из этого подобия получаем, что HK — серединный перпендикуляр также и к CQ'. Остается заметить, что KD — серединный перпендикуляр к PC, а значит, K — центр описанной окружности $\triangle PCQ'$.

5. Дана таблица 100×100. Для любого k ($1 \leqslant k \leqslant 100$), в k-й строке таблицы записаны числа $1, 2, \ldots, k$ в возрастающем порядке слева направо, но не обязательно в последовательных клетках; остальные $100 - k$ клеток заполнены нулями. Докажите, что найдутся два столбца, сумма чисел в одном из которых хотя бы в 19 раз превосходит сумму чисел в другом.

Решение. Заметим, что сумма чисел в первом столбце не превосходит 100. Докажем, что найдется столбец с суммой чисел $\geqslant 1900$.

Предположим противное.

Посчитаем сумму чисел во всей таблице.

$$\sum_{i=1}^{100} \frac{i(i+1)}{2} = \frac{100(100+1)(2\cdot 100+1)}{6\cdot 2} + \frac{100(100+1)}{2\cdot 2} = 171700.$$

Назовем R прямоугольник, образованный первыми 19 столбцами таблицы. Оценим сумму чисел в R. Пусть S_i — сумма чисел в i-й строке R. Тогда:

$$\begin{aligned}
&S_1 \leqslant 1;\\
&S_2 \leqslant 1+2;\\
&S_3 \leqslant 1+2+3;\\
&\ldots\\
&S_{18} \leqslant 1+\ldots+18;\\
&S_{19} \leqslant 1+\ldots+19;\\
&S_{20} \leqslant 1+\ldots+19;\\
&\ldots\\
&S_{100} \leqslant 1+\ldots+19.
\end{aligned}$$

Сложим эти неравенства.

$$S_{19} + S_{20} + \ldots + S_{100} \leqslant 190 \cdot 82 = 15580;$$

$$S_1 + \ldots + S_{18} \leqslant \sum_{i=1}^{19} i(19-i) = 19\sum_{i=1}^{19} i - \sum_{i=1}^{19} i^2 = 19\cdot 190 - \frac{19\cdot 20\cdot 39}{6} = 1140.$$

По предположению сумма чисел в каждом столбце, не вошедшем в R, меньше 1900. Поэтому общая сумма чисел в таблице меньше чем $15580 + 1140 + 81 \cdot 1900 = 170620 < 171700$. Противоречие.