Повторение по комбинаторике

1. Рассмотрим таблицу чисел

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & a_{11} & a_{12} & a_{13} & & & \\ & & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & & \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & \\ \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Первая строка заполняется произвольными нечетными числами. Каждая следующая строка строится по предыдущей по правилу

$$a_{ij} = a_{i-1,j-2} + a_{i-1,j-1} + a_{i-1,j}.$$

Если элемент с нужными индексами отсутствует в таблице, то он считается равным 0. Например, $a_{22} = 0 + a_{11} + a_{12}$ и $a_{37} = a_{25} + 0 + 0$. Докажите, что в каждой строчке кроме первой найдется четное число.

2. В каждой вершине правильного 13-угольника расположено по фишке. Часть фишек белые, остальные черные. Артём хочет, чтобы при отражении относительно одной из осей симметрии 13-угольника белые фишки переходили в белые, а черные — в черные. Докажите, что он может поменять две фишки местами так, чтобы добиться желаемого.

3. Клетки таблички $m \times n$ требуется покрасить в два цвета. При этом для каждой клетки число клеток ее цвета в одной строке с ней должно быть равно числу клеток ее цвета в одном столбце с ней. Для каких пар (m, n) такая раскраска возможна?

4. Было n внешне одинаковых монет, которые весят $x_1, x_2, \ldots, x_n$ граммов (веса монет — попарно различные положительные действительные числа), а также невесомые наклейки с числами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ночью лаборант взвесил монеты и промаркировал их наклейками. Требуется с помощью чашечных весов проверить, что он ничего не перепутал. Например, если $n = 6$, $x_1 = 1, \ldots, x_6 = 6$, то это возможно сделать за 2 взвешивания, проверив, что

$$1 + 2 + 3 = 6,$$
$$1 + 6 < 3 + 5.$$

Существует ли при $n = 8$ такой набор весов $x_1, x_2, \ldots, x_8$, правильность маркировки которого возможно проверить за 2 взвешивания?

5. Дан граф на 60 вершинах. Лиза покрасила часть рёбер в синий цвет, остальные в красный. Оказалось, что в графе нет одноцветных циклов длины 3 и 5. Какое наибольшее количество ребер могло быть в графе?

6. Пусть n и k — натуральные числа одной четности, причем $k \geq n$. Имеется $2n$ лампочек, занумерованных числами $1, 2, \ldots, 2n$, каждая из которых может быть либо включена, либо выключена. Вначале все лампочки выключены. Рассматриваются упорядоченные последовательности шагов: на каждом шаге ровно одна из лампочек меняет свое состояние на противоположное. Обозначим через M число последовательностей из k шагов, после которых все лампочки с 1-й по n-ю включены, а все остальные выключены. Обозначим через N число последовательностей из k шагов, после после которых все лампочки с 1-й по n-ю включены, а все остальные выключены и при этом ни разу не меняли своего состояния. Найдите отношение M/N.