

## Производящие функции

**Определение.** Производящей функцией последовательности  $\{a_n\}$  называется формальный степенной ряд вида

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

Как и с любыми формальными степенными рядами, с ним можно проделывать следующие операции: сложение, умножение, нахождение обратного, дифференцирование.

1. Найдите в замкнутом виде производящую функцию последовательности  $\{a_n\}$ , если **(a)**  $a_n = n$ , **(b)**  $a_n = n^2$ , **(c)**  $a_n = 1/n$ , **(d)**  $a_n = C_m^n$ .
2. Найдите производящую функцию последовательности  $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ , если  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 4$ , записав уравнение на производящую функцию. Затем найдите явный вид  $a_n$ .
3. Пусть  $a_n$  — количество способов разменять  $n$  тугриков, используя монеты номиналом **(a)** 1 и 2 тугрика, **(b)** 1, 2, 4, 8 тугриков.
4. Найдите количество слов из букв  $a, b, c$ , в которых нет **(a)** под слова  $aaa$ , **(b)** под слов  $aa, ab, bb$ .
5. Используя производящие функции, найдите значения следующих сумм:  
**(a)**  $C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n$   
**(b)**  $C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + n^2C_n^n$   
**(c)**  $C_n^0 + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \dots + \frac{C_n^n}{(n+1)}$
6. Найдите производящие функции следующих последовательностей (в ответе можно использовать бесконечное произведение):  
**(a)**  $a_k$  — число способов разбить число  $k$  на различные натуральные слагаемые без учета порядка;  
**(b)**  $b_l$  — количество способов разбить число  $k$  на натуральные слагаемые с учетом порядка;  
**(c)**  $c_k$  — количество способов разбить число  $k$  на натуральные слагаемые без учета порядка;  
**(d)**  $d_k$  — количество способов разбить число  $k$  на нечетные натуральные слагаемые без учета порядка.  
**(e)** Докажите, что  $a_k = d_k$ .