Производящие функции

Определение. Производящей функцией последовательности $\{a_n\}$ называется формальный степенной ряд вида

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

Как и с любыми формальными степенным рядами, с ним можно проделывать следующие операции: сложение, умножене, нахождение обратного, дифференцирование.

1. Найдите в замкнутом виде производяющую функцию последовательности $\{a_n\}$, если **(a)** $a_n = n$, **(b)** $a_n = n^2$, **(c)** $a_n = 1/n$, **(d)** $a_n = C_m^n$.

2. Пусть a_n — количество способов разменять n тугриков, используя монеты номиналом **(a)** 1 и 2 тугрика, **(b)** 1, 2, 4, 8 тугриков.

3. Найдите количество слов из букв a, b, c, в которых нет подслов aa, ab, bb.

4. Используя производящие функции, найдите значения следующих сумм:

(a) $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n$

(b) $C_n^0 + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \ldots + \frac{C_n^n}{(n+1)}$

5. Найдите производящие функции следующих последовательностей (в ответе можно использовать бесконечное произведение):

(a) a_k — число способов разбить число k на различные натуральные слагаемые без учета порядка;

(b) b_l — количество способов разбить число k на натуральные слагаемые с учетом порядка;

(c) c_k — количество способов разбить число k на натуральные слагаемые без учета порядка;

(d) d_k — количество способов разбить число k на нечетные натуральные слагаемые без учета порядка.

(e) Докажите, что $a_k = d_k$.

6. На доске в клетке с координатами $(0, 0)$ стоит король, который может ходить только вверх, вправо и вправо-вверх. Пусть $a_{(m,n)}, b_{(m,n)}$ — количества траекторий короля, заканчивающихся в (m, n), имеющих чётное (соответственно нечётное) число ходов вправо-вверх.

Для последовательности $c_{m,n}$ с двумя индексами производящая функция зависит от двух переменных и определяется так:

$$F(x, y) = \sum c_{m,n}x^my^n$$

7. Докажите, что в современном календаре 13-ое число месяца чаще всего выпадает на пятницу.