Повторение по тч

1. Докажите, что для любого натурального числа $n > 2$ число $n!$ можно представить в виде суммы n различных делителей числа $n!$.

2. Найдите все простые числа p, такие, что $p^2 - 6$ и $p^2 + 6$ — простые.

3. На доске записано натуральное число. Его последняя цифра запоминается, затем стирается и, умноженная на 17, прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Первоначально было записано число 13^{2023}. Может ли после применения нескольких таких операций получиться число 2023^{13}?

4. Существуют ли рациональные числа p, q, r, такие, что $p + q + r = 0$ и $pqr = 1$?

5. Найдите все натуральные числа, взаимно простые со всеми членами последовательности $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.

6. Двое играют в игру. Они по очереди выбирают 7 различных цифр от 1 до 9 (первый — четыре цифры, второй — три). Из них составляется по порядку выбора семизначное число A (первая выбранная цифра — первая цифра A). Первый побеждает, если A — последние 7 цифр десятичной записи седьмой степени некоторого числа. Кто из игроков имеет выйгрышную стратегию?

7. Найдите все натуральные числа a, b, такие, что $b^a | a^b - 1$.

8. Найдите все натуральные числа n, такие, что $n^4 - n^3 + 3n^2 + 5$ — точный квадрат.

9. Докажите, что для любых натуральных чисел m, n существует натуральное число c, такое, что cm, cn имеют одинаковый набор (считая повторения) ненулевых цифр.